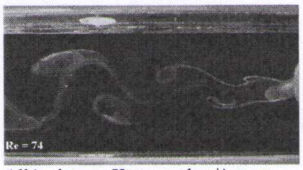
UFR de Physique & Ingénierie année 2015-2016
L2S3 – Algèbre – Dany Huilier



Allée de von Karman derrière un cylindre-Image équipe ITD-IMFS

LICENCE LPAI L2S3 2015-2016
Algèbre

CC1

Dany Huilier – 09 octobre 2015

En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue !
(John von Neumann 1903-1957)

A rédiger sur papier libre, documents autorisés, calculatrice inutile donc portables interdits –

Exercice
Partie A (12 points)
On considère la matrice symétrique A (elle admet par conséquent des valeurs propres réelles)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ Faites en la décomposition LU.

Rappel : On pose A = LU avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

On aura l'algorithme suivant, s'il fonctionne :

(1) ligne 1 de A
$a_{11} = (LU)_{11} = l_{11}u_{11} + 0 + 0$ soit : $u_{11} = a_{11}$
$a_{12} = (LU)_{12} = l_{11}u_{12} + l_{12}u_{22} + 0$ soit : $u_{12} = a_{12}$
$a_{13} = (LU)_{13} = l_{11}u_{13} + l_{12}u_{23} + l_{13}u_{33}$ soit : $u_{13} = a_{13}$

(2) ligne 2 de A
$a_{21} = (LU)_{21} = l_{21}u_{11} + l_{22}u_{21} + 0$ soit : $l_{21} = a_{21} / u_{11}$
$a_{22} = (LU)_{22} = l_{21}u_{12} + l_{22}u_{22} + 0$ soit : $u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}$
$a_{23} = (LU)_{23} = l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} + l_{23}u_{33} = l_{21}u_{13} + u_{23}$ soit : $u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13}$

(3) ligne 3 de A
$a_{31} = (LU)_{31} = l_{31}u_{11} + 0 + 0$ soit : $l_{31} = a_{31} / u_{11}$
$a_{32} = (LU)_{32} = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} + l_{33}u_{32}$ soit : $l_{32} = (a_{32} - l_{31}u_{12}) / u_{22}$
$a_{33} = (LU)_{33} = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33}u_{33}$ soit : $u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}$

puis résolvez le système linéaire pour déterminer le vecteur X

A.X = B où $^{t}B = (4,5,3)$

par descente-remontée en déterminant d'abord Y tel que LY = B, X tel que UX = Y

Partie 2 (8 points)

Utiliser la méthode d'élimination de Gauss (rendre le système triangulaire supérieur) pour la résolution du système précédent

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$