UFR de Physique & Ingénierie année 2014-2015
L2S3 – Algèbre – Dany Huilier

Allée de von Karman derrière un cylindre-Image équipe ITD-IMFS

LICENCE LPAI L2S3 2014-2015

Algèbre

CC2 - Sujet – Amphi Fresnel

Dany Huilier – 17 décembre 2014 8h0 - 9h30

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites

Rien n'est plus proche du vrai que le faux ***Albert Einstein 1879 - 1955***

On se propose de résoudre les systèmes linéaires suivants par la méthode directe de Gauss, et des méthodes itératives de Jacobi ou de Gauss-Seidel si ceci est possible et on envisage aussi une décomposition de Cholesky :

$$(S_1)\begin{cases}4x+3y+3z=10\\3x+4y+3z=10\\3x+3y+4z=10\end{cases} \quad \textbf{et} \quad (S_2)\begin{cases}4x+y+z=6\\x+4y+z=6\\x+y+4z=6\end{cases}$$

Donnez d'abord les solutions de ces 2 systèmes élémentaires, ou calculez ces solutions triviales par une méthode de Gauss.

1. Rappeler une condition suffisante de convergence pour les méthodes de JACOBI et de GAUSS-SEIDEL. Rappeler une autre condition suffisante de convergence pour la méthode de GAUSS-SEIDEL (mais non pour la méthode de JACOBI). Les deux systèmes (S_1) et (S_2) vérifient-ils ces conditions ?
2. Écrire les méthodes de JACOBI et de GAUSS-SEIDEL pour ces deux systèmes linéaires.
3. On illustrera les résultats théoriques de convergence/non-convergence de ces deux schémas en prenant comme point de départ le vecteur (x,y,z) = (0, 0,0) et en calculant les 2, voire 3 premiers itérés :

3.1. avec la méthode de JACOBI pour le système (S_1),
3.2. avec la méthode de GAUSS-SEIDEL pour le système (S_1),
3.3. avec la méthode de JACOBI pour le système (S_2),
3.4. avec la méthode de GAUSS-SEIDEL pour le système (S_2)

4. Utilisez la méthode de Cholesky pour la résolution du deuxième système (S_2)

Rappels sur la méthode de Cholesky – si la matrice A est symétrique définie positive, elle peut se décomposer en $A=L.L^T$ où L est une matrice triangulaire inférieure. Elle peut aussi se décomposer en $A=L^T.L$. L'algorithme est le suivant :si on pose $A=L.L^T$:

$$\begin{pmatrix}l_{11} & 0 & 0\\ l_{21} & l_{22} & 0\\ l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_{11} & l_{21} & l_{31}\\ 0 & l_{22} & l_{32}\\ 0 & 0 & l_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

$L_{11} = \sqrt{A_{11}}$

Puis pour i = 2, 3, …..n

$$L_{ii} = \left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L^2{}_{ik} \right)^{1/2}$$

$$L_{ij} = \frac{1}{L_{ii}} \left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk} \right)$$, avec j = 1,2,…, i-1.

Méthodes itératives (voir document annexe)