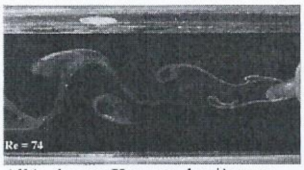
UFR de Physique & Ingénierie année 2015-2016
L2S3 – Algèbre – Dany Huilier



Allée de von Karman derrière un cylindre-Image équipe ITD-IMFS

LICENCE LPAI L2S3 2015-2016
Algèbre

CC2 - Sujet

Dany Huilier – 04 décembre 2015

En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue !
(John von Neumann 1903-1957)

A rédiger sur papier libre, documents autorisés, calculatrice inutile donc portables interdits – Donner le maximum d'intermédiaires de calcul ou joignez vos brouillons !!

Exercice : Méthodes directes & itératives : chacune des 7 questions vaudra 3 points

On considère le système à résoudre

$$AX = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Que peut-on dire d'emblée pour ce système en analysant les caractéristiques de la matrice A à énumérer. Calculez également les valeurs propres de cette matrice, ainsi que les vecteurs propres.
- Résolvez le système par une triangularisation de Gauss pure.
- Résolvez le système par une méthode de Gauss-Jordan complète qui donnera aussi la matrice inverse de A. Et l'on vérifiera !
- Résolvez le système par une décomposition LU. Idem pour la vérification, et résolvez par descente - remontée
- Résolvez le système par une décomposition de Cholesky. Idem pour la vérification, et résolvez par descente - remontée
- Résolvez le système par une méthode itérative de Jacobi. Est-ce possible ? Pourquoi ??
- Résolvez le système par une méthode itérative de Gauss-Seidel. Est-ce possible ? Pourquoi ??

Rappels :

1) **Décomposition LU**

Rappel de la décomposition LU : On pose A = LU avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

On aura l'algorithme suivant, s'il fonctionne :

(1) ligne 1 de A

$a_{11} = (LU)_{11} = l_{11}u_{11} + 0 + 0$

$a_{12} = (LU)_{12} = l_{11}u_{12} + l_{12}u_{22} + 0$

$a_{13} = (LU)_{13} = l_{11}u_{13} + l_{12}u_{23} + l_{13}u_{33}$

(2) ligne 2 de A

$a_{21} = (LU)_{21} = l_{21}u_{11} + l_{22}u_{21} + 0$

$a_{22} = (LU)_{22} = l_{21}u_{12} + l_{22}u_{22} + 0$

$a_{23} = (LU)_{23} = l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} + l_{23}u_{33} = l_{21}u_{13} + u_{23}$

(3) ligne 3 de A

$a_{31} = (LU)_{31} = l_{31}u_{11} + 0 + 0$

$a_{32} = (LU)_{32} = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} + l_{33}u_{32}$

$a_{33} = (LU)_{33} = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33}u_{33}$

puis résolvez le système linéaire par descente – remontée pour déterminer le vecteur X

A.X = B où ${}^tB = (3,2,3)$

en déterminant d'abord Y tel que LY = B, X tel que UX = Y

2) Décomposition de Cholesky simplifiée pour une matrice tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ l_1 & d_2 & 0 \\ 0 & l_2 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & l_1 & 0 \\ 0 & d_2 & l_2 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

3) Méthodes itératives :

Voir tableau