UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Analyse mathématique de fonctions d'une seule et plusieurs variables

L1S1 CH,MPC,PSI et EOST

Examen 11 Janvier 2011

Durée : 2 heures

Documents et outils électroniques non autorisés

Exercice 1. (1) *Calculer le développement limité de* $f(x) = sin(e^{2x} - 1)$ *à l'ordre 3 autour de* $x = 0$.

(2) *Déterminer si la limite suivante existe et, si elle existe, la calculer :*

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(ln(1+2x))}{e^{3x} - 1}$$

(3) *Déterminer si la limite suivante existe et, si elle existe, la calculer :*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - cos(2x) - 2sin(x)}{ln(1+x^2)}$$

Exercice 2. *Calculer les intégrales suivantes :*

(1)
$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$$

(2)
$$\int_0^2 x^3 sin(x^2) dx$$

(3)
$$\int_2^3 \frac{3x^2 + x + 1}{x^3 + x} dx$$

Exercice 3. *Soit* f *la fonction donnée par* $f(x) = ln(2(1 + sin(x)))$.

(1) *Calculer le domaine de définition de* f, *montrer que* f *est périodique et trouver sa période.*

(2) *Trouver les zéro de* f.

(3) *Calculer maxima et minima de* f *et dessiner le graphe de* f.

(4) *Soit* $g : [0, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ *la fonction donnée par* $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. *En quels points de* $[0, \pi]$ *la fonction* g *atteint son maximum et son minimum ?*

(5) *Prouver que* $g(\frac{\pi}{2}) - g(0) = g(\pi) - g(\frac{\pi}{2})$ *et en conclure que* $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{g(\pi)}{2}$.

(6) *Ecrire l'équation de la droite tangente au graphe de* g *en* $x = 0$ *et dessiner un graphe approché de* g *sur* $[0, \pi]$.

Exercice 4. (1) *Trouver une primitive de* $f(t) = tsin(t)$.

(2) *Résoudre l'équation différentielle :*

$$(EH) \qquad y'(t) = tsin(t)y(t)$$

(3) *Résoudre l'équation différentielle :*

$$(E) \qquad y'(t) = tsin(t)y(t) + cos(t)e^{-tcos(t)}$$

(4) *Quelle solution de* (E) *vérifie la condition initiale* $y(0) = 3$?