UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Analyse mathématique de fonctions d'une seule et plusieurs variables

L1S1 CH,MPC,PSI et EOST

Examen Juin 2011

Durée : 2 heures

Documents et outils électroniques non autorisés

Exercice 1. (1) *Calculer le développement limité de* $f(x) = cos(ln(1+3x))$ *à l'ordre 3 àutour de* $x = 0$.

(2) *Déterminer si la limite suivante existe et, si elle existe, la calculer :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{1+8x} - e^{cos(x)}}{sin(4x)}$$

(3) *Déterminer si la limite suivante existe et, si elle existe, la calculer :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+2x) - e^{2x} + cos(x)}{sin(x^2)}$$

Exercice 2. *Calculer les intégrales suivantes :*

(1)

$$\int_1^2 x ln(x^2)dx$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(2x)}{1+(cos(x))^2}dx$$

(aide : utilisez un changement de variables)

(3)

$$\int_5^6 \Big(\frac{4x-13}{x^2-7x+12} + \frac{2x+1}{x^2+1}\Big)dx$$

Exercice 3. *Soit* f *la fonction donnée par* $f(x) = ln(x) - arctan(x-1)$.

(1) *Déterminer le domaine de définition de* f, *puis calculer les limites de* $f(x)$ *quand* x *tend vers le bord du domaine (c'est-a-dire : si le domaine est* $]a, b[$ *calculer* $lim_{x\to a} f(x)$ *et* $\lim_{x\to b} f(x)$*).*

(2) *Trouver les maxima et minima de* f *et déterminer les variations de* f.

(3) *Prouver que* f *admet exactement deux zéros dans le domaine de définition.*

(4) *Tracer le graphe de* f.

(5) *Soit* $g : [1, \infty[\mapsto \mathbb{R}$ *la fonction donnée par* $g(x) = \int_1^x f(t)dt$. *En quel point de* $[1, \infty[$ *la fonction* g *atteint-elle son minimum ? (Attention : on ne cherchera pas à calculer une primitive de* f*).*

(6) *Ecrire l'équation de la droite tangente au graphe de* g *en* $x = 1$ *et dessiner un graphe approché de* g *sur* $[1, \infty[$.

Exercice 4. (1) *Trouver une primitive de* $f(t) = -\frac{2t}{t^2+1}$.

(2) *Résoudre l'équation différentielle :*

$$(EH) \qquad y'(t) = -\frac{2t}{t^2+1}y(t)$$

(3) *Résoudre l'équation différentielle sur l'intervalle* $]0, \infty[$ *:*

$$(E) \qquad y'(t) = -\frac{2t}{t^2+1}y(t) + \frac{ln(t)}{t^3+t}$$

(4) *Quelle solution de* (E) *vérifie la condition initiale* $y(1) = -1$ *?*