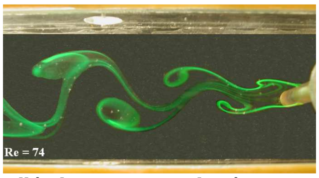

Allée de von Karman derrière un cylindre-Image équipe ITD-IMFS

LICENCE LPAI L2S3 2015-2016
Analyse

CC1 - Corrige – Amphi Weiss

Dany Huilier – 21 octobre 2015 8h00 - 9h00

"La Mathématique est la reine des sciences et l'Arithmétique est la reine des mathématiques."
(Carl Friedrich Gauss Neumann 1903-1957)

A rédiger sur papier libre, sans aucun document autorisé, portables interdits – TOUTE FRAUDE AVEREE SERA SANCTIONNEE

Exercice 1 (7 points)

Issu de http://web.univ-pau.fr/~vperrier/cours/ISTIL_Rappels/corrige_rappels.pdf
(avec des fautes dans le document)

On désire résoudre l'équation linéaire du 2ème ordre suivante :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 2\cosh(x) = \exp(x) + \exp(-x)$$

On résoudra d'abord l'équation homogène puis on cherchera une solution particulière du type $y_P(x) = Ax^2.\exp(x) + B\exp(-x)$. **Il faudra le justifier**

L'équation homogène est linéaire à coefficients constants

On injecte des solutions $y(x) = \exp(rx)$; on obtient alors $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$

Les 2 racines sont confondues et donnent les solutions générales de l'équation homogène :

$$y(x) = K_1\exp(x) + K_2 x\exp(x)$$

Solution particulière
Il est conseillé vu la linéarité de trouver 2 solutions particulières affectées à chaque terme du 2eme membre.

Pour le terme $\exp(-x)$:
Comme -1 n'est pas racine et que un des termes de droite est en $\exp(-x)$, on cherchera une solution en $B\exp(-x)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 4B\exp(-x) = \exp(-x) \text{ **soit** } B = \frac{1}{4}$$

Pour le terme $\exp(x)$:

Comme 1 est racine et que l'un des termes de droite est en $\exp(x)$, on cherchera une solution en $P(x).\exp(x) = (ax + bx^2 + ...)\exp(x) = Ax^2\exp(x)$

pour $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = \exp(x)$

$$\begin{cases} y(x) = Ax^2\exp(x) \\ y'(x) = 2Ax\exp(x) + Ax^2\exp(x) \\ y''(x) = 2A\exp(x) + 4Ax\exp(x) + Ax^2\exp(x) \end{cases},$$

L'équation complète s'écrit alors :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 2A\exp(x) = \exp(x), \quad \textbf{soit } A = \frac{1}{2}$$

La solution finale est alors : $y(x) = K_1\exp(x) + K_2 x\exp(x) + \frac{\exp(-x)}{4} + \frac{x^2\exp(x)}{2}$

Exercice 2 (9 points)
Issu de http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/roux/enseignements/1011/TD8_corr.pdf

Résoudre le système de 2 équations différentielles couplées

$$\begin{cases} dx/dt = x - 4y \\ dy/dt = -2x - y \end{cases} \quad \textbf{avec } x(0) = 0, y(0) = 3$$

Ce système s'écrit sous forme matricielle

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On peut chercher les valeurs propres de la matrice :

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 \\ -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 9 = (\lambda+3)(\lambda-3)$$

Les racines seront par conséquent : $\lambda = +3, \lambda = -3, Spectre(+3, -3)$

On peut calculer des vecteurs propres pour chacune des valeurs propres

Cas $\lambda = +3$

$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$ soit : $\begin{cases} x - 4y = 3x \\ -2x - y = 3y \end{cases}$ **soit :** $-4y = 2x$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sera vecteur propre

Cas $\lambda = -3$

$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ -3y \end{pmatrix}$ soit : $\begin{cases} x - 4y = -3x \\ -2x - y = -3y \end{cases}$ **soit :** $y = x$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sera vecteur propre

On pourra définir la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et l'on aura :

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} . \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si l'on travaille avec le vecteur $Y\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1}X\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le système s'écrit

$\frac{dY}{dt} = DY = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, soit un système de 2 équations indépendantes de solutions

$Y\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \exp(3t) \\ \mu \exp(-3t) \end{pmatrix}$, soit $\begin{cases} u(t) = \lambda \exp(3t) \\ v(t) = \mu \exp(-3t) \end{cases}$

Et l'on peut revenir dans la base initiale car : $X = PY$

$X\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = PY\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ soit : $\begin{cases} x(t) = 2u(t) + v(t) = 2\lambda \exp(3t) + \mu \exp(-3t) \\ v(t) = -u(t) + v(t) = -\lambda \exp(3t) + \mu \exp(-3t) \end{cases}$

On peut prendre les conditions initiales $x(0) = 0, y(0) = 3$ pour fixer $\lambda = -1, \mu = 2$

$$\begin{cases} x(t) = -2\exp(3t) + 2\exp(-3t) \\ v(t) = \exp(3t) + 2\exp(-3t) \end{cases}$$

BONUS : Exercice 3 (5 points)

Montrez que $\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5)$ .On utilisera le développement limité de $\cos x = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ..\right) + o(x^6)$ et de $f(x) = \cos^2 x$

Formule de Taylor : $f(x) = f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + ... + ...o(x^N)$

On part du développement limité de cos x jusqu'à l'ordre 4 après les termes seront d'ordre supérieur

$$\cos^2 x = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ..\right)^2 = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ..\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ..\right) =$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ..\right) - \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ..\right) + \frac{x^4}{4!} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{2!2!} + \frac{x^4}{4!}.+.\right) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5)$$

Autre méthode : calculer les dérivées successives de la fonction cosinus carré.

$$\cos^2 x = \cos^2(0) - 2x(\sin(x)(\cos(x))_{x=0} + \frac{2x^2}{2!}\left(\sin^2(x) - \cos^2(x)\right)_{x=0} + \frac{8x^3}{3!}\left(\sin(x)\cos(x)\right)_{x=0}$$

$$-\frac{8x^4}{4!}\left(\sin^2(x) - \cos^2(x)\right)_{x=0} .... == 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5)$$