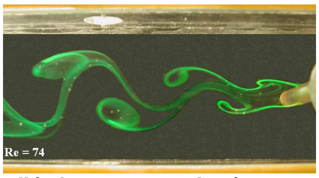

Allée de von Karman derrière un cylindre-Image équipe ITD-IMFS

LICENCE LPAI L2S3 2015-2016
Analyse

CC2 - Corrige – Amphi Weiss

Dany Huilier – 30 novembre 2015 14h00 - 15h00

"On ne connaît pas complètement une science tant qu'on n'en sait pas l'histoire.."
(Auguste Comte 1798-1858)

A rédiger sur papier libre, sans aucun document autorisé, calculatrices & portables interdits –

Exercice 1 (5 points) Un peu d'analyse classique niveau L1
On considère la fonction $f(x)=\sin^3(x)\cos^2(x)$

1) **Calculez la valeur de sa dérivée en** $x=\pi/4$
2) **Linéarisez cette fonction <u>en utilisant les relations</u>**
   $2\cos(x)=\exp(ix)+\exp(-ix)\quad et\quad 2i\sin(x)=\exp(ix)-\exp(-ix)$
3) **En déduire la primitive**
4) **Enfin calculez le développement limité de cette fonction jusqu'à l'ordre 3 inclus**

Corrigé :

$f(x)=\sin^3(x)\cos^2(x)$**, soit** $f'(x)=3\sin^2(x)\cos^3(x)-2\cos(x)\sin^4(x)$

$$f'(x=\pi/4)=\cos^5(\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$f(x)=\sin^3(x)\cos^2(x)=\left[\left(\frac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i}\right)^3\left(\frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2}\right)^2\right]=$$

$$\left(\frac{\exp(3ix)-3\exp(ix)+3\exp(-ix)-\exp(-3ix)}{-8i}\right)\left(\frac{\exp(2ix)+2+\exp(-2ix)}{4}\right)=$$

$$-\frac{1}{32i}\left[\begin{matrix}(\exp(i5x))-3\exp(i3x)+3\exp(ix)-\exp(-ix)+2\exp(i3x)-6\exp(ix)+6\exp(-ix)-2\exp(-3ix)+\\ \exp(ix)-3\exp(-ix)+3\exp(-3ix)-\exp(-i5x)\end{matrix}\right]$$

$$-\frac{1}{32i}[(\exp(i5x)+2\exp(i3x)+4\exp(ix)-4\exp(-ix)-2\exp(-3ix)-\exp(-i5x)]=$$

$$-\frac{1}{16}\left[\frac{\exp(i5x)-\exp(-i5x)}{2i}-2\frac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i}-\frac{\exp(i3x)-\exp(-i3x)}{2i}\right]=$$

$$-\frac{1}{16}[\sin(5x)-2\sin(x)-\sin(3x)]=\frac{1}{16}[-\sin(5x)+2\sin(x)+\sin(3x)]$$

$$\sin^5(x)=\frac{1}{16}[\sin(5x)+10\sin(x)-5\sin(3x)]\quad \text{et}\quad \sin^3(x)=\frac{1}{16}[+12\sin(x)-4\sin(3x)]$$

$$f(x) = \sin^3(x)\cos^2(x) = \sin^3(x) - \sin^5(x) = \frac{1}{16}\left[-\sin(5x) + \sin(3x) + 2\sin(x)\right]$$

Primitive :

$$F(x) = \frac{1}{16}\int -\sin(5x) + \sin(3x) + 2\sin(x)dx = \frac{1}{16}\left[\cos(5x) - \cos(3x) - 2\cos(x)\right] + C$$

$$F(x) = \int \sin^3(x)\cos^2(x)dx = -\int \sin^2(x)\cos^2(x)d(\cos(x)) = -\int (1-\cos^2(x))\cos^2(x)d(\cos(x)) =$$

$$F(x) = \frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} + C$$

Vérification : $F'(x) = f(x) = -\sin(x).\cos^4(x) + \sin(x).\cos^2(x) = \sin(x).\cos^2(x)\left(1-\cos^2(x)\right)$

Développement limité :

$$f(x) = \frac{1}{16}\left[-\sin(5x) + \sin(3x) + 2\sin(x)\right] = \frac{1}{16}\left[-5x + \frac{(5x)^3}{3!} + 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + 2x - \frac{2(x)^3}{3!} + \right] =$$

$$\frac{1}{16}\left(\frac{(125-27-2)x^3}{3!} + \right) = x^3 + o(x^5)$$

Exercice sur les séries infinies (6 points/20)

On considère l'équation différentielle $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0$

1) On cherchera les solutions par la méthode directe
2) Puis des solutions en séries infinies $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
3) Les 2 méthodes donnent-elles les mêmes solutions générales ?

Corrigé

On montre d'abord que la série doit vérifier $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1).a_n x^{n-2} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1).a_n x^{n-2} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1).a_{n+2} x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Aussi les coefficients sont liés par la relation de récurrence :

$$(n+2)(n+1).a_{n+2} - 4a_n = 0$$

Ceci génère 2 séries, l'une engendrée par le paramètre a_0, l'autre par a_1.

On a pour la série à terme paire n = 2k : $a_{2(k+1)} = \dfrac{4a_{2k}}{(2k+2)(2k+1)}$, soit $a_{2k} = \dfrac{(2)^{2k}a_0}{(2k)!}$

Car : $a_2 = \dfrac{4a_0}{(2)(1)}, a_4 = \dfrac{2^4 a_0}{4!}, a_6 = \dfrac{2^6 a_0}{6!}$,.........

On a pour la série à terme impaire n = 2k-1 : $a_{2k+1} = \dfrac{4a_{2k-1}}{(2k+1)(2k)}$, soit $a_{2k+1} = \dfrac{(2)^{2k}a_1}{(2k+1)!}$

Car : $a_3 = \dfrac{4a_1}{(3)(2)}, a_5 = \dfrac{2^4 a_1}{5!}, a_7 = \dfrac{2^6 a_1}{7!}$,.........

soit

$$y(x) = a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2)^{2k}x^{2k}}{(2k)!} + a_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2)^{2k}x^{2k+1}}{(2k+1)!} = a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2)^{2k}x^{2k}}{(2k)!} + \frac{a_1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2)^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!} = a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} + \frac{a_1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$\frac{(a_0 + a_1/2)}{2}.\exp(2x) + \frac{(a_0 - a_1/2)}{2}.\exp(-2x) = c_1.\exp(2x) + c_2.\exp(-2x)$$

Exercice 1 (6 points) EDO par 2 méthodes

On désire résoudre l'équation linéaire du 2ème ordre suivante :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 3y = 8x\exp(x) + 5x\exp(2x)$$

Par 2 méthodes :

- La méthode classique
- La Méthode de variation des constantes

<u>Méthode Classique</u>

L'équation homogène est linéaire à coefficients constants
On injecte des solutions $y(x) = \exp(rx)$; on obtient alors $r^2 + 2r - 3 = (r-1)(r+3) = 0$
Les 2 racines sont non confondues et donnent les solutions générales de l'équation homogène :

$$y(x) = K_1\exp(x) + K_2\exp(-3x)$$

Une solution particulière de l'équation complète sera du type :
$y_P(x) = (Ax^2 + Bx).\exp(x) + (Cx + D)\exp(2x)$.
Comme $r = 1$ est racine, $8x\exp(x)$ induit une solution particulière partielle $(Ax^2 + Bx).\exp(x)$, $5x\exp(2x)$ une solution particulière partielle $(Cx + D)\exp(2x)$.

Après résolution :

$$\frac{dy_{p1}}{dx} = (Ax^2 + Bx).\exp(x) + (2Ax + B)\exp(x)$$
$$\frac{d^2y_{p1}}{dx^2} = (Ax^2 + Bx).\exp(x) + (2Ax + B)\exp(x) + (2Ax + B)\exp(x) + 2A\exp(x)$$
$$y_{P1}(x) = (Ax^2 + Bx).\exp(x)$$
$$\frac{d^2y_{p1}}{dx^2} + 2\frac{dy_{p1}}{dx} - 3y_{p1} = 8x\exp(x) = 4(2Ax + B)\exp(x) + 2A\exp(x), soit:$$
$$8A = 8, 4B + 2A = 0 \quad soit \quad A = 1, B = -1/2$$

$$y_{P2}(x) = (Cx + D).\exp(2x)$$
$$\frac{dy_{p2}}{dx} = 2(Cx + D).\exp(2x) + (C)\exp(2x)$$
$$\frac{d^2y_{p2}}{dx^2} = 4(Cx + D).\exp(2x) + (2C)\exp(2x) + (2C)\exp(2x)$$
$$\frac{d^2y_{p2}}{dx^2} + 2\frac{dy_{p2}}{dx} - 3y_{p2} = 5x\exp(2x) = 5(Cx + D)\exp(2x) + 6C\exp(2x), soit:$$
$$5C = 5, 6C + 5D = 0 \quad soit \quad C = 1, D = -6/5$$

$$y(x) = K_1\exp(x) + K_2\exp(-3x) + (x^2 - x/2).\exp(x) + (x - 6/5)\exp(2x)$$

<u>Méthode de variation des Constantes</u>

On cherche une solution de l'équation avec second membre de la forme

$$y(x) = K_1(x)\exp(x) + K_2(x)\exp(-3x)$$

Par dérivation on obtient :

$$y'(x) = K_1(x)\exp(x) + K_1'(x)\exp(x) - 3K_2(x)\exp(-3x) + K_2'(x)\exp(-3x)$$

On impose une première relation qui fait disparaitre dans y'(x) les dérivées $K_1'(x)$ *et* $K_2'(x)$

$$K_1'(x)\exp(x) + K_2'(x)\exp(-3x) = 0$$

Donc : $y'(x) = K_1(x)\exp(x) - 3K_2(x)\exp(-3x)$

Puis en dérivant de nouveau :

$$y''(x) = K_1(x)\exp(x) + K_1'(x)\exp(x) + 9K_2(x)\exp(-3x) - 3K_2'(x)\exp(-3x)$$

On injectant dans l'équation complète :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-3y=K_1(x)\exp(x)+K_1'(x)\exp(x)+9K_2(x)\exp(-3x)-3K_2'(x)\exp(-3x)+$$
$$2K_1(x)\exp(x)-6K_2(x)\exp(-3x)-3K_1(x)\exp(x)-3K_2(x)\exp(-3x)=K_1'(x)\exp(x)-3K_2'(x)\exp(-3x)=$$
$$8x\exp(x)+5x\exp(2x)$$

On en vient à résoudre :

$$\begin{cases} K_1'(x)\exp(x)+K_2'(x)\exp(-3x)=0 \\ K_1'(x)\exp(x)-3K_2'(x)\exp(-3x)=8x\exp(x)+5x\exp(2x) \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre ce système pour obtenir $K_1'(x)$ *et* $K_2'(x)$ et à chercher des primitives pour obtenir $K_1(x)$ *et* $K_2(x)$

$$\begin{cases} 4K_1'(x)\exp(x)=8x\exp(x)+5x\exp(2x) \\ -4K_2'(x)\exp(-3x)=8x\exp(x)+5x\exp(2x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4K_1'(x)=8x+5x\exp(x) \\ -4K_2'(x)=8x\exp(4x)+5x\exp(5x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4K_1(x)=4x^2+5(x-1)\exp(x)+A \\ -4K_2(x)=2x\exp(4x)-\frac{1}{2}\exp(4x)+x\exp(5x)-\frac{1}{5}\exp(5x)+B \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_1(x)=x^2+\frac{5}{4}(x-1)\exp(x)+K_1 \\ K_2(x)=-\frac{x}{2}\exp(4x)+\frac{1}{8}\exp(4x)-\frac{x}{4}\exp(5x)+\frac{1}{20}\exp(5x)+K_2 \end{cases}$$

La solution générale est donnée par :

$$y(x)=K_1(x)\exp(x)+K_2(x)\exp(-3x)=$$
$$\left[\begin{array}{l} \left(x^2+\frac{5}{4}(x-1)\exp(x)+K_1\right)\exp(x)+\left(-\frac{x}{2}\exp(4x)+\frac{1}{8}\exp(4x)-\frac{x}{4}\exp(5x)+\frac{1}{20}\exp(5x)+K_2\right)\exp(-3x)= \\ K_1\exp(x)+K_2\exp(-3x)+\left(x^2\exp(x)\right)+\exp(2x)\left(\frac{5}{4}(x-1)-\frac{x}{4}+\frac{1}{20}\right)+\exp(x)\left(-\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\right)= \\ K_1\exp(x)+\frac{\exp(x)}{8}+K_2\exp(-3x)+\left(x^2-\frac{x}{2}\right)\exp(x)+\exp(2x)\left(x-\frac{6}{5}\right) \end{array}\right]$$

Exercice 4 (3/20)

On se propose d'approximer sin(1/2)

Soit x > 0.

Démontrez que $\left|\sin x - x + \frac{x^3}{3!}\right| \leq \frac{x^4}{4!}$

En déduire que : $\frac{23}{48} - \frac{1}{384} \leq \sin(1/2) \leq \frac{23}{48} + \frac{1}{384}$

Rappel et piste : on utilise la formule de Taylor-Lagrange et on pondère le reste par un majorant. Si f est une fonction dérivable alors pour x, il existe $\theta \in (0,1)$ tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x=0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta.x) \text{ où } \quad \theta \in (0,1)$$

Correction :

$$f(x=1/2) = x - \frac{x^3}{3!} = \frac{1}{2} - \frac{(1/2)^3}{3!} + \frac{(1/2)^5}{5!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{48} = \frac{23}{48}$$

Taylor-Lagrange donne :

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!}\cos(\theta.x)$, soit $\sin x - x + \frac{x^3}{3!} = -\frac{x^4}{4!}\cos(\theta.x)$, soit

$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{3!}\right| = \left|\frac{x^4}{4!}\cos(\theta.x)\right| \leq \frac{x^4}{4!}$; en x = 1/2 : $\left|\sin(1/2) - \frac{23}{48}\right| = \left|\frac{x^4}{4!}\cos(\theta.x)\right| \leq \frac{1}{384}$

$-\frac{1}{384} \leq \sin(1/2) - \frac{23}{48} \leq \frac{1}{384}$, $\quad \frac{23}{48} - \frac{1}{384} \leq \sin(1/2) \leq \frac{23}{48} + \frac{1}{384}$

Application numérique

$$\frac{23}{48} - \frac{1}{384} \approx 0.4766 \leq \sin(1/2) \approx 0.4794 \leq \frac{23}{48} + \frac{1}{384} \approx 0.4818$$