Université de Strasbourg

Octobre 2014

Licence de Physique 1re année
Licence de Sciences pour l'Ingénieur 1re année
Licence de Physique Chimie 1re année

Contrôle Continu de Mécanique nº 1

Aucun document n'est autorisé. Aucune calculatrice n'est autorisée.

Durée 1h30 heure

Exercice 1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\text{a)}\quad f_1(t) = \alpha \ln(1+t^2); \quad \text{b)}\quad f_2(t) = \alpha\cos(\omega t+\beta)\mathrm{e}^{\gamma t};$$
$$\text{a)}\quad f_3(t) = \alpha\sin(\sqrt{\omega t+\varphi}); \quad \text{b)}\quad f_4(t) = \frac{\alpha t}{\alpha t^2+\beta t+\gamma};$$
$$\text{d)}\quad f_5(t) = \alpha\sin(\omega t+\beta)\cos(\omega t+\beta)$$

où α, β, ω et γ sont des constantes.

Exercice 2

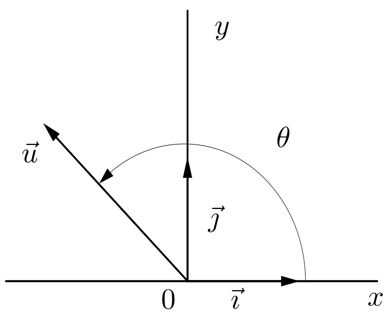
On considère les expressions suivantes :

$$\text{a)}\quad l_1 + l_2^2 = l_3^2; \quad \text{b)}\quad l_1 = l_2\cos(t_1); \quad \text{c)}\quad l_1 = l_2\cos(t_1/t_2);$$
$$\text{d)}\quad m_1 l_1 + \frac{m_2^2 l_2^3}{m_1 l_1^2} = \frac{(m_1 l_1)^2}{m_2 l_2}; \quad \text{e)}\quad m_1 = m_2\exp(-t); \quad \text{f)}\quad \frac{l_1}{l_2} = \exp(-\frac{t_1}{t_2})$$

où l_1, l_2 et l_3 représentent une longueur, m_1 et m_2 représentent des masses et t_1 et t_2 représentent des temps. Ces relations sont-elles homogènes, c'est à dire sont-elles susceptibles de représenter une relation ayant un sens physique ? On justifiera les réponses.

Exercice 3

On considère le repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $\vec{u}$ un vecteur unitaire tel que



où θ est l'angle entre les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{u}$.

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes de $\vec{u}$ en fonction de θ.
2. Calculer le vecteur $\vec{v} = \dfrac{d\vec{u}}{d\theta}$ et montrer que $\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ et calculer $\|\vec{v}\|$.
3. Déterminer les coordonnées cartésiennes du vecteur $\vec{w}$ afin que le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme un trièdre direct.
4. On suppose que θ est une fonction du temps et on considère le vecteur $\vec{A}$ défini par $\vec{A} = \alpha(t)\vec{v}$ où $\alpha(t)$ est une fonction dépendant du temps t. Calculer $\dfrac{d\vec{A}}{dt}$ et exprimer le résultat en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 4
Un point matériel M assujetti à un mouvement plan décrit une trajectoire définie par l'équation en coordonnées polaires :

$$\rho = r_0(1 - \beta t) \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\alpha t}{1 - \beta t}$$

où ρ et θ sont les coordonnées polaires de M et r_0, α et β des constantes. On notera $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ la base locale polaire.

1. Donner les dimensions de r_0, de α et de β.
2. Calculer dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ les composantes de $\vec{v}$, vecteur vitesse de M.
3. Calculer dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ les composantes de $\vec{a}$, vecteur accélération de M.
4. Montrer que l'accélération $\vec{a}$ passe par O, le centre du repère polaire.

Exercice 5
Un poisson rouge se promène dans son bocal. Le mouvement de son centre M dans un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est décrit par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

où ω et R désignent deux constantes positives.

1. Établir l'équation cartésienne de la trajectoire suivie par M et préciser sa nature.
2. Déterminer les composantes cartésiennes de $\vec{v}$, la vitesse de M. Calculer sa norme.
3. Quelle caractéristique le mouvement présente-t-il ? Que représente ω ?
4. Calculer les coordonnées cartésiennes de $\vec{a}$, l'accélération de M.
5. Établir une relation simple entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{a}$.

On considère maintenant le repère cylindrique $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.

6. Donner dans le repère cylindrique les équations paramétriques de la trajectoire.
7. Déterminer les composantes cylindriques de $\vec{v}$, la vitesse de M.

8. Calculer les coordonnées cylindriques de l'accélérations $\vec{a}$ et retrouver la relation entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{a}$.
9. Las d'effectuer toujours le même trajet, le poisson décide d'ajouter une composante verticale $z(t) = v_0 t$ au mouvement précédent où v_0 est une constante. Quelle est la nature de la trajectoire de M.

Exercice 6

Des flocons de neige tombent verticalement par rapport au sol, en parcourant 8 m par seconde. A quelle vitesse les passagers d'une voiture, roulant à 50 km.h^{-1} sur une route droite, les voient-ils frapper le pare-brise du véhicule ?