Université de Strasbourg
Licence de Physique 1re année
Licence de Sciences pour l'Ingénieur 1re année
Licence de Physique Chimie 1re année

Octobre 2015

Contrôle Continu de Mécanique n° 1

Aucun document n'est autorisé. Aucune calculatrice n'est autorisée.
Tous les exercices sont indépendants - Durée 1h30 heure

Exercice 1
Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f_1(t) = \alpha \ln(1+t^2)$; b) $f_2(t) = \alpha \cos(\omega t + \beta) e^{\gamma t}$; c) $f_3(t) = \alpha \sin(\sqrt{\omega t + \varphi})$;

d) $f_4(t) = \dfrac{\alpha t}{\alpha t^2 + \beta t + \gamma}$; e) $f_5(t) = \alpha \sin(\omega t + \beta)\cos(\omega t + \beta)$; f) $f_6(t) = \alpha \sin^2(\omega t + \varphi)$;

g) $f_7(t) = \alpha \left[e^{\omega t}\right]^2$; h) $f_8(t) = \tan(\omega t + \varphi)$; i) $f_9(t) = \tan^2(\omega t + \varphi)$;

j) $f_{10}(t) = [\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)]^2$, $i \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$.

où α, β, ω, φ et γ sont des constantes et t, une variable sans dimension.

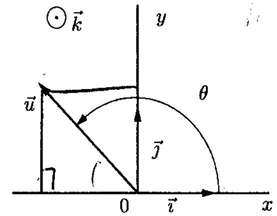
Exercice 2
On considère les expressions suivantes :

a) $l_1 + l_2^2 = l_3^2$; b) $l_1 = l_2 \cos(t_1)$; c) $l_1 = l_2 \cos(t_1/t_2)$;

d) $m_1 l_1 + \dfrac{m_2^2 l_2^3}{m_1 l_1^2} = \dfrac{(m_1 l_1)^2}{m_2 l_2}$; e) $m_1 = m_2 \exp(-t_1)$; f) $\dfrac{l_1}{l_2} = \exp(-\dfrac{t_1}{t_2})$

où l_1, l_2 et l_3 sont des grandeurs dont la dimension est une longueur, m_1 et m_2 ont la dimension de masses et t_1 et t_2 des temps. Ces relations sont-elles homogènes, c'est à dire sont-elles susceptibles, d'un point de vue dimensionnel, de représenter une relation ayant un sens physique ? On justifiera les réponses.

Exercice 3
On considère le repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et $\vec{u}$ un vecteur unitaire tel que



où θ est l'angle entre les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{u}$.

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes de $\vec{u}$ en fonction de θ.
2. Calculer le vecteur $\vec{v} = \dfrac{d\vec{u}}{d\theta}$, montrer que $\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ et calculer $\|\vec{v}\|$.
3. Déterminer les coordonnées cartésiennes du vecteur $\vec{w}$ afin que le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme un trièdre direct.
4. On suppose que θ est une fonction du temps et on considère le vecteur $\vec{A}$ défini par $\vec{A} = \alpha(t)\vec{v}$ où $\alpha(t)$ est une fonction dépendant du temps t. Calculer $\dfrac{d\vec{A}}{dt}$ et exprimer le résultat en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Rappel :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

Exercice 4
Un point matériel M assujetti à un mouvement plan décrit une trajectoire définie par l'équation en coordonnées polaires :

$$\rho(t) = r_0(1 - \beta t) \quad \text{et} \quad \theta(t) = \frac{\alpha t}{1 - \beta t}$$

où ρ et θ sont les coordonnées polaires de M et r_0, α et β des constantes. On notera $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ la base locale polaire.

1. Donner les dimensions de r_0, de α et de β.
2. Donner dans la base polaire $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ où O est le centre du repère polaire.
3. Calculer dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ les composantes de $\vec{v}$, vecteur vitesse de M.
4. Calculer dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ les composantes de $\vec{a}$, vecteur accélération de M.
5. Montrer que l'accélération $\vec{a}$ passe par O.

Exercice 5

Un poisson rouge se promène dans son bocal. Le mouvement de son centre M dans un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est décrit par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

où ω et R désignent deux constantes positives.

1. Établir l'équation cartésienne de la trajectoire suivie par M et préciser sa nature.
2. Déterminer les composantes cartésiennes de $\vec{v}$, la vitesse de M. Calculer sa norme.
3. En justifiant votre réponse, préciser si le mouvement est uniforme ? Que représente ω ?
4. Calculer les coordonnées cartésiennes de $\vec{a}$, l'accélération de M.
5. Établir une relation simple entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{a}$.

On considère maintenant le repère cylindrique $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.

6. Donner dans le repère cylindrique les équations paramétriques de la trajectoire.
7. Déterminer les composantes cylindriques de $\vec{v}$, la vitesse de M.
8. Calculer les coordonnées cylindriques de l'accélération $\vec{a}$ et retrouver la relation entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{a}$.
9. Las d'effectuer toujours le même trajet, le poisson décide d'ajouter une composante verticale $z(t) = v_0 t$ au mouvement précédent où v_0 est une constante. Quelle est la nature de la trajectoire de M.

Exercice 6

On étudie le mouvement de deux voitures, considérées comme ponctuelles, le long d'un axe Ox. Les deux voitures ont la même vitesse constante v_0 et se suivent à une distance d. À $t = 0$s, la première voiture freine avec une décélération a. La seconde ne commence à freiner qu'au bout d'un temps t_r avec une décélération b.

1. Déterminer la distance parcourue par le premier véhicule depuis l'instant initial jusqu'à l'arrêt (distance d'arrêt).
2. Déterminer la distance d'arrêt du deuxième véhicule.
3. Quelle condition doit satisfaire la distance d pour que la deuxième voiture s'arrête derrière la première sans entrer en collision avec elle ?
4. Que devient cette dernière condition si les deux véhicules ont même décélération ?