Université de Strasbourg 18 Octobre 2016

Licence de Physique 1re année
Licence de Sciences pour l'Ingénieur 1re année
Licence de Physique Chimie 1re année

Contrôle Continu de Mécanique no 1

Aucun document n'est autorisé. Aucune calculatrice n'est autorisée.

Tous les exercices sont indépendants - Durée 1h30 heure

Exercice 1 (4 points)

Sans se préoccuper de leur domaine de définition, calculer les dérivées des fonctions adimensionnées suivantes (on veillera à donner des expressions les plus simples possibles) :

a) $f_1(t) = \cos\left(\sqrt{\omega t + \varphi}\right)$; b) $f_2(t) = \dfrac{(2t/\tau + 1)}{(2t/\tau + 3)^2}$; c) $f_3(t) = \alpha \sin(\omega t + \beta) \mathrm{e}^{-\gamma t}$;

d) $f_4(t) = \cos(\omega t + \beta) \sin^2(\omega t + \beta)$; e) $f_5(t) = \alpha \left[\mathrm{e}^{\sin(\omega t)}\right]$; f) $f_6(t) = \alpha \tan^2(\omega t + \varphi)$;

g) $f_7(t) = \ln|\omega t|$; h) $f_8(t) = \dfrac{t}{\tau} \sin\left(\dfrac{\tau}{t}\right)$

où t est une variable dont la dimension est un temps et où α, β, ω, φ, τ et γ sont des constantes dont on donnera les dimensions.

Exercice 2 (3 points)

La période T d'un satellite terrestre sur une orbite circulaire peut dépendre, a priori, de m, la masse de la Terre, du rayon R du cercle décrit et de la constante de la gravitation universelle G. On fait l'hypothèse que la période T a pour expression :

$$T = K m^a R^b G^c$$

où K est une constante sans dimension et a, b et c des constantes qu'on cherche à préciser.

1. Donner l'expression de la force gravitationnelle.
2. Donner la dimension de G.
3. Déterminer, par une analyse dimensionnelle, les valeurs de a, b et c. En déduire l'expression de la formule de la période T.

Exercice 3 (3 points)
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé. Soit C le cercle de centre O et de rayon R situé dans le plan (O, x, y). Soit P un point du cercle, tel que $\overrightarrow{OP}$ forme un angle θ avec l'axe (Ox) (avec $0 < \theta < \pi/2$).

1. Déterminer les composantes du vecteur unitaire $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{OP}$.
2. Déterminer les composantes du vecteur $\vec{v}$ telles que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ soit orthonormée directe.
3. Donner l'équation de la droite (D) passant par P et perpendiculaire à $\overrightarrow{OP}$.
4. Soit A le point d'intersection entre (D) et l'axe (Ox), et B entre (D) et (Oy). Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis sa norme. Appliquer ces résultats au cas où $\theta = \pi/4$.

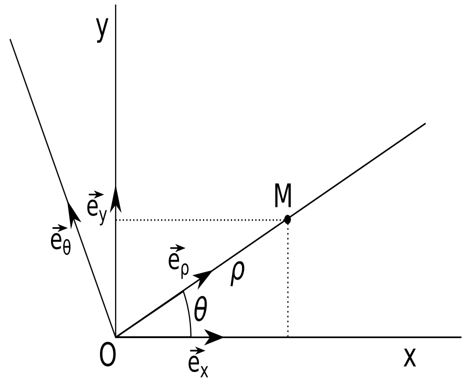
Exercice 4 (3 points)
Une voiture C roule à la vitesse constante $v_0 = 90$ km.h^{-1} sur une route horizontale et droite. Un motard M démarre à l'instant $t = 0$ où la voiture passe à sa hauteur (au point O) et accélère ensuite uniformément. Il atteint une vitesse de 90 km.h^{-1} au bout de $t = 10$ s.

1. Donner la position de la voiture et du motard en fonction du temps t (équations horaires).
2. Quel temps T faut-il au motard pour rattraper la voiture ?
3. Quelle sera alors la distance d parcourue par le motard ?
4. Quelle sera alors la vitesse v_1 acquise par le motard ?

Exercice 5 (5 points)
Un point M décrit dans le plan (O, x, y) une spirale d'équations :

$$x = b\theta\cos(\theta) \quad \text{et} \quad y = b\theta\sin(\theta)$$

où b est une constante positive et θ est l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et l'axe (Ox). Cet angle dépend du temps et on note $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ la fréquence angulaire qui sera supposée constante et strictement positive $(\omega > 0)$ dans toute l'exercice.



À l'instant initial $t = 0$, on suppose $\theta = 0$. Le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ constitue un repère d'observation pour le référentiel $\mathscr{R}$ dans lequel est étudié le mouvement. On notera $(0, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ le repère polaire.

1. Exprimer, en fonction de θ et de b, le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans le repère $(0, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$.
2. Déduire de la question précédente les expressions de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$ du point M dans le repère polaire.
3. Calculer v, la norme du vecteur vitesse.
4. En déduire que le vecteur tangent $\vec{\tau}$ de la base de Frenet se met sous la forme :

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega t)^2}}\vec{e}_\rho + \frac{\omega t}{\sqrt{1 + (\omega t)^2}}\vec{e}_\theta.$$

Questions de cours (2 points)

Soit $\mathscr{R}'$ un référentiel en mouvement par rapport à un référentiel $\mathscr{R}$.

1. Exprimer les lois de composition des vitesses et des accélérations. On nommera les différents termes apparaissant dans ces relations.
2. On suppose $\mathscr{R}'$ en rotation uniforme par rapport à $\mathscr{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, l'expression de la loi de composition des vitesses en fonction du vecteur rotation $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, ω désignant la vitesse angulaire et $\vec{k}$ un vecteur unitaire de l'axe de rotation.
   (b) Donner sans démonstration, l'expression de la loi de composition des accélérations en fonction de $\vec{\omega}$.