Université de Strasbourg Novembre 2015

Licence de Physique 1re année
Licence de Sciences pour l'Ingénieur 1re année
Licence de Physique Chimie 1re année

Contrôle Continu de Mécanique no 2

Aucun document n'est autorisé. Aucune calculatrice n'est autorisée.

Tous les exercices sont indépendants - Durée 1h30 heure

Exercice 1

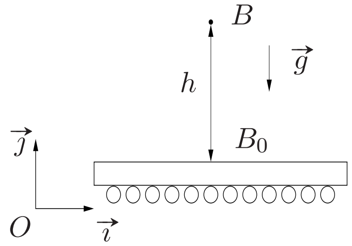
Calculer les primitives ou les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int \sin(\omega x + \varphi) dx, \qquad I_2 = \int \frac{dx}{(x-a)^n}, \qquad I_3 = \int \tan(x) dx,$$
$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \sin(x) \cos^2(x) dx, \qquad I_5 = \int 4\mathrm{e}^{i\omega x} dx, \qquad I_6 = \int \sin^2(x) dx$$

où ω, φ et a sont des constantes réelles et n un entier naturel. On rappelle que le calcul d'une intégrale peut parfois se simplifier considérablement en prenant en compte la ou les symétries de la fonction à intégrer.

Exercice 2

Une personne se tient immobile sur un tapis roulant horizontal. Il lâche sans vitesse initiale une bille B d'une hauteur $h = 1$m par rapport au tapis, à l'aplomb du point B_0 sur le tapis. On néglige toute force de frottement et on note $\vec{g}$ l'accélération due à la pesanteur. On supposera que le référentiel terrestre, muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est galiléen. On note $\mathscr{R}'$ le référentiel lié au tapis roulant.

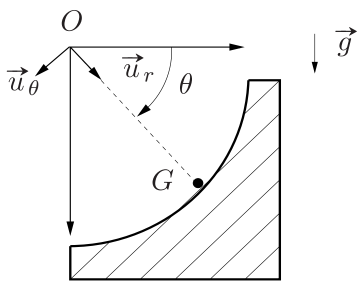


1. Le tapis roulant avance à la vitesse constante $\vec{v}_0 = v_0 \vec{\imath}$ avec $v_0 = 3,6 \text{km.h}^{-1}$.
    a) Le référentiel, $\mathscr{R}'$, lié au tapis roulant est-il galiléen ? On justifiera la réponse.
    b) On se place dans le référentiel $\mathscr{R}'$.
        i) Faire le bilan des forces agissant sur la bille.
        ii) Déterminer la position du point d'impact I de la bille sur le tapis par rapport à B_0. Si I est différent de B_0, on précisera si le sens de $\overrightarrow{B_0 I}$ est identique ou opposé à celui de $\vec{\imath}$.
        iii) Déterminer t_c, le temps de chute de la bille.

2. Le tapis roulant est maintenant uniformément freiné à l'instant même où la personne lâche la bille ; il s'arrête au bout d'une durée $\Delta t = 1$s et on note $\vec{a} = a\vec{\imath}$ la décélération du tapis.
   a) Déterminer la valeur numérique de la décélération a.
   b) Le référentiel, $\mathscr{R}'$, lié au tapis roulant est-il galiléen ? On justifiera la réponse.
   c) On se place dans $\mathscr{R}'$.
      i) Faire le bilan des forces agissant sur la bille dans $\mathscr{R}'$.
      ii) Exprimer dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ le principe fondamental de la dynamique.
      iii) Calculer en fonction de a, h et g la position du point d'impact I de la bille sur le tapis par rapport à B_0. Si I est différent de B_0, on précisera si le sens de $\overrightarrow{B_0I}$ est identique ou opposé à celui de $\vec{\imath}$.
      iv) Le temps de chute de la bille est-il différent de celui calculé précédemment ? Si non pourquoi ? Si oui, donner son expression.
      v) Calculer numériquement la distance ente I et B_0. On prendra $g = \|\vec{g}\| = 10$ m.s^{-2}.

Exercice 3

Dans un référentiel galiléen, un enfant assimilé à un point matériel G de masse m glisse sur un toboggan décrivant une trajectoire circulaire de rayon R_0 depuis la position $\theta = \theta_0$ où il possède une vitesse nulle jusqu'à la position $\theta = \pi/2$ où il quitte le toboggan. On néglige tous les frottements. On note $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ le repère cylindrique et $\vec{g}$ l'accélération due à la pesanteur.



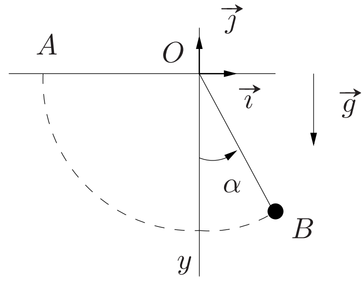
1. Faire le bilan des forces et les exprimer dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.
2. En utilisant le théorème du moment cinétique, établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ.
3. En multipliant l'équation différentielle obtenue à la question précédente par $\dot{\theta}$, montrer la relation
$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R_0}\sin(\theta) + K$$
   où K est une constante que l'on précisera.
4. Établir l'expression de $\|\vec{v}\|$ où $\vec{v}$ est la vitesse de l'enfant, en fonction de θ et des constantes du problème.

Rappel :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

Exercice 4

Un point matériel M de masse m est attaché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur ℓ, de masse négligeable et dont l'autre extrémité est attachée en un point fixe O. Le point M est lâché sans vitesse initiale depuis la position A telle que le fil soit horizontal. Le pendule effectue un quart d'oscillation, puis le fil se rompt alors que le pendule forme un angle $\alpha < \pi/2$ avec la verticale descendante (Oz) et que le point M est en B. On supposera que le référentiel, muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, est galiléen et on note $\vec{g}$ l'accélération due à la pesanteur.



1. Déterminer l'énergie potentielle du système $E_p(y)$. On prendra $E_p(y = \ell) = 0$.
2. En exprimant la conservation de l'énergie mécanique, déterminer la norme v_B de la vitesse du point M en B, en fonction de $g = \|\vec{g}\|$, ℓ et α.
3. Exprimer dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la vitesse $\vec{v}_B$ du point M en B.
4. Déterminer les équations cartésiennes de la trajectoire décrite par M à la suite de la rupture du fil. Montrer que la trajectoire est une parabole.
5. On note S le sommet de cette trajectoire parabolique, exprimer la norme v_S de la vitesse de passage en S.
6. En exprimant la conservation de l'énergie, déterminer la différence h entre les altitudes des points A et S, en fonction de ℓ et α.