Université de Strasbourg
1ère année Licence de Physique
et Licence Sciences pour l'Ingénieur
1ère année Licence Physique - Chimie

Année 2016-2017
22/11/2016
Durée 90 minutes

Contrôle Continu de Mécanique n°2
(Calculettes et portables non autorisés, documents non autorisés)
(**Tout résultat non justifié sera considéré comme inexistant**)

Exercice 1 (Calcul intégrale)

Calculer les primitives ou les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\ , \qquad I_2 = \int_0^{\pi} \sin^2(x)\,\cos(x)\,\mathrm{d}x\ , \qquad I_3 = \int_0^1 (4x^3 - 6x^2 + 2)\,\mathrm{d}x\ ,$$

$$I_4 = \int x\,\mathrm{e}^{\alpha x^2}\,\mathrm{d}x\ , \qquad I_5 = \int x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x\ , \qquad I_6 = \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x\ .$$

où α est une constante.

Exercice 2 (Lancement d'une balle avec et sans force de frottement)

Dans un référentiel galiléen muni d'un repère cartésien $(\mathrm{O}xyz)$, on étudie la trajectoire d'une balle de masse m, assimilable à un point matériel M. On choisit l'axe $\mathrm{O}z$ comme verticale ascendante. À l'instant initial ($t_{\mathrm{o}}=0$) la balle est lancée depuis l'origine O avec une vitesse $\vec{v}_{\mathrm{o}}$ sous un angle α avec l'horizontale (axe $\mathrm{O}x$). Dans ce qui suit, le mouvement sera considéré comme étant contenu dans le plan $(x\mathrm{O}z)$.

Dans un premier temps on considère que la balle n'est soumise qu'à son seul poids (accélération de pesanteur $\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$ uniforme) et on néglige toute force de frottement.

1) Calculer en fonction de v_{o}, g et α le temps t_c mis par la balle pour atteindre le point culminant C dont on donnera les coordonnées $(x_{\mathrm{c}}, z_{\mathrm{c}})$.

2) Déterminer l'angle α pour lequel la balle arrive le plus loin possible.

On suppose désormais qu'en plus de son poids, la balle est soumise à une force de frottement (due aux collisions avec les molécules de l'air) proportionnelle à la vitesse instantanée $\vec{v}$, toujours opposée au mouvement et de la forme $\vec{F}_{\mathrm{fr}} = -\lambda\,\vec{v}$, λ étant une constante.

3) Établir les équations différentielles qui résultent de la RFD et les résoudre pour déterminer la vitesse $\vec{v}$ de la balle en fonction du temps. Montrer qu'elle atteint (pour $t \to \infty$) une valeur limite que l'on précisera.

4) Déterminer les coordonnées x et z en fonction du temps.

5) Donner l'expression du temps $t_c^{'}$ mis par la balle pour atteindre le point culminant C.

Rappel : Les solutions générales de l'équation différentielle $f'(x) + a\,f(x) = b$ avec des constantes a et b sont de la forme :

$$f(x) = C\,e^{-ax} + \frac{b}{a}$$

où C est une constante qui sera déterminée par les conditions initiales.

Exercice 3 (Point matériel lancé horizontalement)

Dans le champ de pesanteur terrestre, on lance une masse ponctuelle m, représentée par le point matériel M, à partir d'un point O avec une vitesse horizontale $\vec{v}_\mathrm{o}$ pointant vers les x positifs. On néglige tout frottement.

1) Déterminer à partir de la relation fondamentale de la dynamique les équations du mouvements $x(t)$ et $y(t)$.

2) Évaluer par rapport à O et en fonction du temps t, le moment $\vec{\Gamma}(\mathrm{O})$ des forces agissant sur M.

3) Calculer, à l'instant t après le lancement, le moment cinétique de M par rapport à O.

4) Vérifier le théorème du moment cinétique à partir des résultats obtenus.

Exercice 4 (Point matériel oscillant le long d'un axe en rotation)

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen. Dans le plan horizontal de ce référentiel un axe OΔ de vecteur unitaire $\vec{u}_r$ tourne autour de l'axe Oz (vecteur unitaire $\vec{k}$) avec une vitesse angulaire ω_o constante. Un point matériel M se déplace sur l'axe OΔ à une distance de l'origine O donnée par

$$r(t) = \mathrm{R_o} + \mathrm{r_o}\left[\cos(\omega_\mathrm{o} t) + \sin(\omega_\mathrm{o} t)\right]$$

où $\mathrm{R_o}$ et $\mathrm{r_o}$ sont des constantes avec $\mathrm{R_o} > \mathrm{r_o}$.

1) Soit $\mathcal{R}'$ le référentiel lié à l'axe OΔ et muni du repère $(\mathrm{O}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$. $\mathcal{R}'$ est-il galiléen ?

2) Exprimer dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ et en fonction de $\mathrm{R_o}$, $\mathrm{r_o}$ et de ω_o, la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$ et la vitesse relative $\vec{v}_r$ du point M. En utilisant la loi de composition des vitesses, donner la vitesse du point M pour un observateur dans $\mathcal{R}$.

3) Déterminer l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e$, l'accélération relative $\vec{a}_r$ et l'accélération de Coriolis $\vec{a}_c$ de M. En déduire l'accélération absolue (par rapport au référentiel $\mathcal{R}$).