Université de Strasbourg
UFR de Physique et Sciences pour l'Ingénieur
Licence de Physique et Sciences Pour l'Ingénieur - 1ère Année

8 Janvier 2014

Contrôle Continu de Mécanique 3 (version 3.2)
Documents, calculette, et portable non autorisés.
Durée 2 heures.

Questions de cours :

1. Donner la définition d'une force centrale.
2. À quelle condition une force centrale est-elle conservative ?
3. Une particule de masse m, assimilable à un point matériel M et animée d'une vitesse $\vec{v}$, est soumise à une force centrale de centre de force O. Montrer que $\vec{L}_O$, le moment cinétique de M par rapport à O est une constante du mouvement. En déduire que le mouvement est plan.

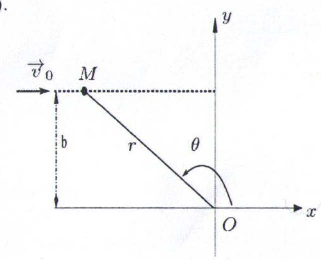
Exercice I : force centrale

Dans un référentiel galiléen muni d'un repère $Oxyz$, une particule de masse m, assimilée à un point matériel M est soumise à une force $\vec{F}$:

$$\vec{F}(r) = \left(\frac{mA}{r} - Bmr\right)\vec{e}_r$$

où r est la distance à l'origine O du point M, A et B deux constantes positives et $\vec{e}_r$ le vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ de la base locale cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

A l'instant $t = 0$, la particule incidente se trouve à une distance $r = r_0$ et possède une vitesse $\vec{v}_0$ de direction parallèle à l'axe Ox et coupant l'axe Oy à l'ordonnée b ($b > 0$) (voir Figure). On traitera le problème en coordonnées polaires (r, θ) avec $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et θ désigne l'angle polaire compris entre l'axe Ox et le vecteur position $\overrightarrow{OM}$. On négligera la force de pesanteur et les éventuels frottements.



1. Déterminer les dimensions des constantes A et B.
2. Quelle condition sur r doit satisfaire la force $\vec{F}(r)$ pour qu'elle soit répulsive ? attractive ? En déduire une position d'équilibre $r = r_{eq}$.
3. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle $E_p(r)$ dont dérive cette force $\vec{F}(r)$.

4. Le système est-il conservatif ? Donner alors l'expression de l'énergie mécanique E_m de la particule en fonction de la distance r et de la vitesse v de la particule. Donner la valeur de E_m en utilisant les conditions initiales de la particule.
5. Donner l'expression des vecteurs position et vitesse, $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$, dans la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, ainsi que v^2.
6. Donner l'expression générale du moment cinétique $\vec{L}_O$ de M par rapport à O en fonction de m, r et $\dot{\theta}$.
7. Calculer le moment $\vec{\mathcal{M}}_O\left(\vec{F}(r)\right)$, de la force $\vec{F}(r)$ par rapport à O. En déduire que le moment cinétique $\vec{L}_O$ est une constante du mouvement. Déterminer la norme du moment cinétique $\| \vec{L}_O \|$ en fonction de m, v_0 et b.
8. Si on suppose que dans l'expression de la force $\vec{F}(r)$ la constante A est nulle ($A = 0$), montrer que r vérifie l'équation ci-dessous :
$$v_0^2 - \frac{(v_0 b)^2}{r^2} + B\left(r_0^2 - r^2\right) = \dot{r}^2$$
(On pourra utiliser la conservation de l'énergie mécanique et les résultats des questions précédentes)
9. Montrer que pour la distance minimale d'approche $r = r_{min}$, la vitesse $\vec{v}$ est orthoradiale.
10. Déterminer l'équation polynomiale satisfaite par r pour la distance minimale $r = r_{min}$.

Exercice II : collision entre deux particules

On étudie la collision entre deux particules considérées comme des points matériels de masse m_1 et m_2 respectivement.

1. On étudie d'abord un choc frontal élastique entre les deux particules, où la particule de masse m_1 est initialement animée d'une vitesse $\vec{v_1}$ alors que la particule de masse m_2 est initialement au repos. Après le choc, les deux particules possèdent des vitesses $\vec{v_1}'$ et $\vec{v_2}'$ qui sont également orientées selon la direction du vecteur $\vec{v_1}$.
   (a) Indiquer quelles sont les quantités physiques qui sont conservées dans un tel choc élastique.
   (b) Déterminer les vecteurs vitesses $\vec{v_1}'$ et $\vec{v_2}'$ des deux particules après le choc, en fonction des masses m_1 et m_2 et des vitesses initales $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$.
   (c) Donner les vitesses $\vec{v_1}'$ et $\vec{v_2}'$ dans les trois cas suivants :
      i. $m_1 \ll m_2$
      ii. $m_1 = m_2$
      iii. $m_1 \gg m_2$
2. On reprend ce même problème, mais en supposant maintenant que le choc entre les deux particules est parfaitement inélastique, , c'est-à-dire où les deux particules restent soudées après la collision (choc mou). Répondre comme dans 1) aux questions (a) (b) (c).