Université de Strasbourg
Licence 1ère année PSI, MPC

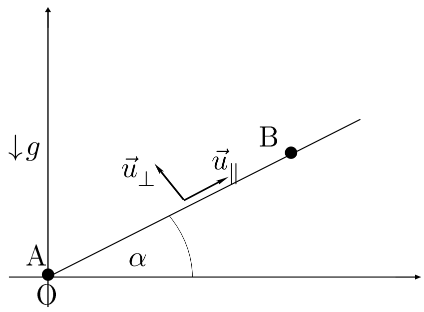
Année 2014-2015
09/01/2015
Durée 120 minutes

Contrôle Continu de Mécanique n°3

(Calculettes et portables non autorisés, documents non autorisés)

(Tout résultat non justifié sera considéré comme inexistant)

Exercice 1 **(Collision de deux particules)**



Deux particules, assimilées à deux points matériels A et B, se déplacent dans un plan le long d'une droite (AB) dans des directions opposées. L'inclinaison de cette droite par rapport à l'horizontale est d'un angle α. On note $(\vec{u}_\parallel, \vec{u}_\perp)$ une base orthonormée du plan où $\vec{u}_\parallel$ est un vecteur unitaire de la droite (AB). On introduit la coordonnée s le long de la pente (direction $\vec{u}_\parallel$) en la comptant à partir de l'origine O. Le point matériel A de masse m_A se trouve à l'instant $t=0$ à l'origine ($s_\mathrm{A}(t=0)=0$) et se déplace avec une vitesse initiale v_0 vers le haut de la pente, alors que le point matériel B de masse m_B se trouve au même instant à une distance $D_0 = \overline{\mathrm{AB}} = s_\mathrm{B}(t=0)$ du point A (voir figure ci-contre). La vitesse initiale du point B est nulle. Les deux particules sont soumis à la force de pesanteur. Les forces de frottement sont à négliger.

1) Écrire la relation fondamentale de la dynamique et la projeter selon les direction $\vec{u}_\parallel$ et $\vec{u}_\perp$ pour déterminer les accélérations des deux points matériels A et B le long de la pente. En déduire la position de deux points matériels en donnant $s_\mathrm{A}(t)$ et $s_\mathrm{B}(t)$.
2) Déterminer l'instant t_c où les deux particules entrent en collision. À quelle distance D_c de l'origine O a lieu la collision ? Quelles sont les vitesses $v_\mathrm{A}(t_c)$ et $v_\mathrm{B}(t_c)$?

La collision entre les deux particules est parfaitement inélastique de telle façon qu'après le choc elles restent collées l'une à l'autre.

3) Déterminer la vitesse $\vec{v}\,'$ des particules directement après la collision ?
4) Calculer l'énergie cinétique totale E_cin directement avant le choc, ainsi que l'énergie cinétique E'_cin directement après le choc. Y a-t-il perte d'énergie cinétique ? Pourquoi ?
5) Reprendre les questions 1 à 3 en donnant des valeurs numériques aux différentes quantités. On prendra : $m_\mathrm{A} = m_\mathrm{B} = 20\,g$, $v_0 = v_\mathrm{A}(t=0) = 10\,\mathrm{m/s}$, $D_0 = s_\mathrm{B}(t=0) = 10\,\mathrm{m}$, $\alpha = 30°$. Pour simplifier le calcul on prendra $g = 10\,m/s^2$.

Exercice 2 **(Système de deux particules)**

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, muni d'un repère de centre O, on considère un système isolé constitué de deux particules, respectivement de masses m_1 et m_2, de vecteurs position $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ et de vitesses constantes $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. On note $M = m_1 + m_2$ la masse totale du système.

1) Rappeler l'expression du vecteur position $\vec{R} = \overrightarrow{\mathrm{OG}}$, G désignant le centre de masse du système de deux particules.
2) Exprimer $\vec{v}_\mathrm{G}$, la vitesse du centre de masse, en fonction de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ et des masses m_1 et m_2.

3) Définir le référentiel $\mathcal{R}^*$ du centre de masse. Est-il galiléen ?

On définit une particule fictive (ou relative) par son vecteur position $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ et par sa masse (masse réduite) $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$.

4) Caculer la vitesse $\vec{v}_r$ de cette particule fictive en fonction de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

5) Exprimer $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ en fonction de $\vec{R}$ et $\vec{r}$.

6) Démontrer que l'énergie cinétique totale peut s'exprimer sous la forme $E_{\text{cin}} = \frac{M}{2}\,\vec{v}_G^{\,2} + \frac{\mu}{2}\,\vec{v}_r^{\,2}$.

7) En déduire E^*_{cin}, l'énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse.

8) Démontrer que le moment cinétique totale par rapport à O, $\vec{L}_{\text{o}}$, s'exprime sous la forme $\vec{L}_{\text{o}} = (\vec{R} \wedge \vec{P}) + \mu\,(\vec{r} \wedge \vec{v}_r)$ où $\vec{P}$ est la quantité de mouvement totale du système des deux particules.

9) En déduire $\vec{L}^*$, le moment cinétique dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ du centre de masse.

Exercice 3 (Trajectoire elliptique)

Dans un référentiel galiléen muni du repère cartésien $(\text{O}, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ une particule M de masse m assimilable à un point matériel se déplace le long d'une trajectoire telle qu'à chaque instant son vecteur position $\vec{r}(t) = \overrightarrow{\text{OM}}(t)$ vérifie :

$$\vec{r}(t) = A\,cos(\omega t)\,\vec{u}_x + B\,sin(\omega t)\,\vec{u}_y$$

avec des demi-axes $A\,, B > 0$ et la fréquence angulaire $\omega > 0$ qui sont tous constants. On introduit également la base locale $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z\}$ telle que $\vec{r} = r\,\vec{u}_r$.

1) Calculer la vitesse $\vec{v}$ et l'accélération $\vec{a}$ du point M dans la base cartésienne puis dans la base locale.

2) Déterminer la force qui agit sur la particule.

3) Justifier que cette force dérive d'une énergie potentielle $E_{\text{p}}(r)$, où $r = \|\overrightarrow{\text{OM}}(t)\|$, et déterminer l'expression de $E_{\text{p}}(r)$.

4) Déterminer l'énergie cinétique de la particule.

5) Montrer (sans calcul) que l'énergie mécanique de la particule est une constante du mouvement.

6) Calculer $\vec{L}_{\text{o}}$ le moment cinétique de la particule par rapport au point O et démontrer qu'il représente une constante du mouvement.

Les questions 7 et 8 de cet exercice sont en "bonus".

7) En se servant de l'écriture des différentes quantités dans la base locale, montrer que l'énergie mécanique E_{m} de la particule peut se mettre sous la forme

$$E_{\text{m}} = \frac{m}{2}\,\dot{r}^{\,2} + V_{\text{eff}}(r)$$

où $V_{\text{eff}}(r)$ est une fonction que l'on précisera.

8) Sur un graphique qui montre la variation de V_{eff} en fonction de la variable radiale r, positionner l'énergie mécanique de la particule afin d'obtenir une trajectoire elliptique.