Université de Strasbourg

Janvier 2016

Licence de Physique 1re année
Licence de Sciences pour l'Ingénieur 1re année
Licence de Physique Chimie 1re année

Contrôle Continu de Mécanique n^{o} 3
Aucun document n'est autorisé. Aucune calculatrice n'est autorisée.
Tous les exercices sont indépendants - Durée 2h30.

Questions de cours (4,5 points)

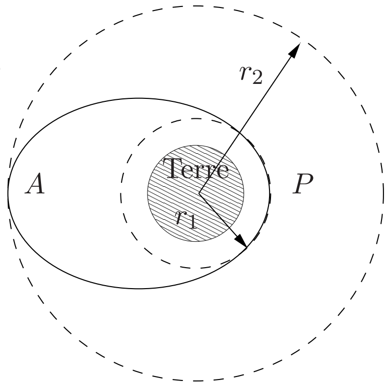
Dans le référentiel $\mathscr{R}$ du laboratoire, supposé gallilléen, on considère une système S de N points matériels A_i, de masse m_i et de vitesse $\vec{v}_i$, i variant de 1 à N.

1. Donner la définition de $\vec{P}$, la quantité de mouvement totale du système S dans $\mathscr{R}$.
2. Donner la définition de $\vec{L}_{/O}$, le moment cinétique total de S dans $\mathscr{R}$ par rapport à un point fixe O.
3. Soit O' un point quelconque de $\mathscr{R}$, montrer la relation
$$\vec{L}_{/O'} = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{P} + \vec{L}_{/O}.$$
4. Donner l'expression du centre de masse du système S, et définir le référentiel associé $\mathscr{R}^\star$.
5. Montrer que dans $\mathscr{R}^\star$, le moment cinétique par rapport à un point quelconque O d'un système de N points matériels est indépendant de O.
6. Énoncer et démontrer le théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique.

Exercice 1 (2,5 points)

Un système isolé constitué par un bloc de glace de masse m, initialement immobile, explose en trois fragments. Après l'explosion, un premier fragment de masse $m/4$ se déplace à une vitesse $\vec{v}$ vers l'est. Un deuxième fragment, de masse $m/4$ lui aussi, se dirige vers le sud à une vitesse de $2\vec{v}$. Par rapport à un repère que l'on choisira, donner les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}'_3$ du troisième fragment ? En déduire un vecteur unitaire colinéaire à $\vec{v}'_3$.

Exercice 2 (7 points)



On veut transférer un satellite de masse m initialement sur une **orbite circulaire** basse de rayon r_1 (autour de la Terre de masse M_T) à une orbite circulaire haute de rayon r_2. Pour changer de trajectoire, il faut modifier la valeur de l'énergie mécanique du satellite. Durant cette phase très courte, le principe de conservation de l'énergie n'est plus vérifié et ce sont les moteurs du satellite qui vont permettre de l'accélérer ou de le ralentir. Ce changement d'orbite s'effectue suivant une orbite elliptique (ellipse de Hohman) tangente aux deux orbites circulaires en A et P et dont la Terre est un foyer.

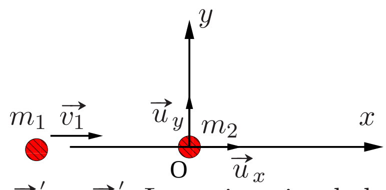
Dans tout le problème, on se placera dans $\mathscr{R}_g$, un référentiel considéré comme galiléen dont l'origine du repère est le centre de la terre et dont les trois axes pointent vers des étoiles lointaines qui apparaissent fixes (référentiel géocentrique).

1. Rappeler l'expression de l'accélération en coordonnées polaires d'un point matériel en mouvement circulaire.
2. Donner la force $\vec{F}$ (norme et direction) exercée par la terre sur le satellite.
3. À partir du principe fondamental de la dynamique (PFD), montrer que sur une orbite circulaire, la vitesse du satellite est de norme constante.
4. Déterminer la vitesse $v_1 = \|\vec{v}_1\|$ où $\vec{v}_1$ est la vitesse du satellite sur l'orbite basse et l'exprimer en fonction de $\mathcal{G}$, la constante gravitationnelle, de la masse de la terre M_T et de r_1.
5. Soit $v_2 = \|\vec{v}_2\|$ où $\vec{v}_2$ est la vitesse du satellite sur l'orbite circulaire haute. En justifiant votre réponse, préciser si v_2 est supérieure ou inférieure à v_1.
6. Calculer l'énergie potentielle du satellite $E_{p1} = E_p(r = r_1)$ sur l'orbite basse. On supposera que l'énergie potentielle s'annule lorsque la distance r entre la terre et le satellite devient infinie.
7. Calculer l'énergie mécanique du satellite E_{m1} sur son orbite basse et l'exprimer en fonction de $\mathcal{G}$, M_T, m et r_1.

Pendant un laps de temps très court, sur l'orbite circulaire basse, en P, on met en marche le réacteur du satellite qui acquiert ainsi un supplément de vitesse dans le sens du mouvement. La trajectoire du satellite devient alors une ellipse dont le périgée est confondu avec P et dont l'apogée se trouve en A, sur l'orbite circulaire haute.

8. Montrer qu'en A et P, les vitesses sont orthoradiales.
9. Montrer que $r_1 v_P = r_2 v_A$ où v_A et v_P désignent respectivement les normes des vitesses du satellite à l'apogée et au périgée.
10. En écrivant la conservation de l'énergie mécanique sur cette trajectoire elliptique, calculer v_P et v_A en fonction de r_1, r_2, v_1 et v_2.
11. En déduire les accroissements de vitesse $\Delta v_A = v_2 - v_A$ et $\Delta v_P = v_P - v_1$

Exercice 3 (6 points)



Dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$, une pierre assimilable à un point matériel M_1 de masse $m_1 = 3\,\mathrm{kg}$ se dirige sans frottement sur une surface glacée horizontale avec une vitesse de norme $v_1 = 5\,\mathrm{m/s}$ vers une deuxième pierre M_2 de masse $m_2 = m_1 = 3\,\mathrm{kg}$ initialement immobile.

Après la collision, les deux pierres ont respectivement des vitesses $\vec{v}_1^{\,\prime}$ et $\vec{v}_2^{\,\prime}$. La trajectoire de la première pierre de masse m_1 est déviée de 60° (vers le haut) par rapport à sa direction initiale et la norme de sa vitesse n'est plus que $v_1^{\prime} = 2\,\mathrm{m/s}$. Dans un premier temps, on ne sait pas si la collision est élastique ou inélastique et c'est ce qu'on voudrait déterminer entre autre choses.

1. Donner la définition d'une collision élastique et d'une collision inélastique. Quelle sont les quantités qui sont conservées dans un cas et dans l'autre ?
2. Déterminer les composantes cartésiennes des vecteurs vitesse $\vec{v}_1^{\,\prime}$ et $\vec{v}_2^{\,\prime}$ après la collision.
3. Calculer les énergies cinétiques $\mathrm{E_{cin}}$ et $\mathrm{E'_{cin}}$ avant et après la collision. Commenter.
4. La collision est-elle élastique ou inélastique ?

On veut maintenant décrire le mouvement dans $\mathscr{R}^{\star}$, le référentiel du centre de masse. On se limite à l'étude du mouvement des deux pierres avant la collision.

5. Donner la définition du vecteur $\vec{r}_G = \overrightarrow{OG}$ qui définit la position du centre de masse G en fonction des positions $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ des deux pierres et de leurs masses m_1 et m_2.
6. Quelle est alors la vitesse $\vec{v}_G = d\,\overrightarrow{OG}/dt$ du centre de masse ?
7. Le référentiel du centre de masse $\mathscr{R}^{\star}$ est-il galiléen ?
8. Exprimer les vecteurs position $\vec{r}_1^{\,*} = \overrightarrow{GM}_1$ et $\vec{r}_2^{\,*} = \overrightarrow{GM}_2$ des deux pierres en fonction des vecteurs position $\overrightarrow{OM}_1$, $\overrightarrow{OM}_2$ et $\overrightarrow{OG}$.
9. Donner dans le référentiel du centre de masse les vitesses $\vec{v}_1^{\,*}$ et $\vec{v}_2^{\,*}$ des deux pierres en fonction des masses et des vecteurs vitesses $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_G$.

Rappel : $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$