

Contrôle du 20 février 2014

Durée : 1 heure

Tout document, calculatrice et téléphone portable sont interdits. Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Exercice 1 (Questions de Cours)

(a) Donner la définition d'une matrice inversible. Donner la caractérisation d'une matrice inversible à l'aide du rang et ensuite à l'aide du déterminant.

(b) Considérons le système linéaire :

$$AX = B,$$

de matrice associée A et de second membre B , à n équations et p inconnues.

Quelles sont les tailles des matrices A , X et B ?

Supposons que $n = p$. Si A est inversible, combien a-t-on de solutions à ce système ? Pourquoi ?

Exercice 2 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Exercice 3 Résoudre dans \mathbb{R} le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ x - y + 2z = 1. \end{cases}$$

Géométriquement, quel est l'ensemble de ses solutions ?

Exercice 4 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & a & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{pmatrix}.$$

Pour quelles conditions sur a, b, c , la matrice M est-elle inversible ?