

### I) Applications directes du cours

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

1. Donner la définition de l'ensemble  $F + G$ .
2. Si  $E$  est de dimension 5,  $F$  de dimension 2 et  $G$  de dimension 3, quelles sont les dimensions possibles de  $F + G$  ?

### II) Exercice

Soit  $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 10 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & b \\ 7 & 3 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer  $\det(A)$ .
2. Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$ ,  $\det(A)$  est-il un multiple de 5 ?

### III) Exercice

Soit

$$B = \begin{pmatrix} x & 2 & 2 \\ 0 & 2 & y \\ x & 0 & x - y \end{pmatrix}$$

1. À quelles conditions sur les réels  $x$  et  $y$ ,  $\det(B) = 0$  ?
2. Pour quelles valeurs de  $x$  et  $y$ , la famille  $\mathcal{F} = \{(x, 0, x), (2, 2, 0), (2, 0, x - y)\}$  est-elle génératrice de  $\mathbb{R}^3$  ?

### IV) Exercice

Soit  $G$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2z = 0\}$$

1. Quelle est la dimension de  $G$  ?
2. Donner une base de  $G$ .
3. Toujours dans  $\mathbb{R}^3$ , donner une équation ou un système d'équations caractérisant le sous-espace vectoriel  $H = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{v_1, v_2, v_3\}$ , avec  $v_1 = (1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (2, 3, 1)$ , et  $v_3 = (0, -1, 1)$ .
4. Donner un exemple de vecteur non nul de  $H \cap G$ .