Université de Strasbourg **2015-2016**

U.F.R. de Mathématiques et Informatique

Algèbre linéaire S2

Contrôle du 11 février 2016

durée : 1 heure

Questions de cours. — Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Donnez les définitions d'une matrice symétrique, d'une matrice antisymétrique et d'une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

est-elle symétrique, antisymétrique ou orthogonale ? Justifiez votre réponse.

Exercice 1. — Écrire la matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont les coefficients $a_{i,j}$ vérifient

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2i, & \text{si } i-j=0 \\ i+j, & \text{si } i-j=2 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2. — Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 puis $A^2 + A$.

2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.

3. Écrire la matrice A^{-1}.

Exercice 3. — Pour tout nombre réel m, on considère la matrice $A_m \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & m \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de la matrice A_m en fonction du paramètre m.

2. Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle inversible ?

Exercice 4. —

1. Donner la forme bien échelonnée ou échelonnée réduite de la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. En déduire l'ensemble des solutions (x, y, z), avec $x, y, z \in \mathbb{R}$, du système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$$