Université de Strasbourg **2016-2017**

U.F.R. de Mathématiques et Informatique

Algèbre linéaire S2

Contrôle du 16 février 2017

durée : 1 heure

Questions de cours. — Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Rappeler la définition d'une matrice inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A^3 + 5A^2 - A + I_n = 0_n$. Montrer que A est inversible et donner son inverse à l'aide de A.

Exercice 1. — Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $B = A + I_3$. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. — Soient $m \in \mathbb{R}$ et la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 & 0 \\ m & 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & -m & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner la transposée A_m^T de A_m

2. Déterminer le rang des matrices A_m et A_m^T *(on discutera suivant les valeurs de m).*

Exercice 3. — Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si A est inversible et si c'est le cas donner l'inverse A^{-1} de A.

Exercice 4. — Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + ay + 2z + t = 1 \\ ax + y + az = 0 \\ x + 2z - t = 1 \end{cases}$$

(on discutera suivant les valeurs de a).