Université de Strasbourg
Algèbre L1-S2

2013/2014

Contrôle continu du jeudi 27 mars 2014

I) Questions de cours

a) Soit $\{v_1, v_2, ...v_n\}$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^d$ (avec $d \geq n \geq 1$). Soit w un vecteur de Vect$\{v_1, v_2, ...v_n\}$. Démontrer qu'il existe des <u>uniques</u> nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$, tels que

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n.$$

b) Soit

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ -a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'ensemble G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Justifier la réponse.

II) Exercice

a) Calculer le déterminant suivant, de paramètre m :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & m & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

b) Donner le rang de la matrice M ci-dessous, <u>en expliquant</u> comment on peut le déduire du résultat obtenu en **a)** sans faire de calculs.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & m & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & m & -m \end{pmatrix}$$

c) Résoudre le système linéaire suivant, d'inconnue (x, y, z).

$$\begin{pmatrix} 2 & m & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & m & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Donner (avec explication clairement rédigée) la dimension de Vect$\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, si u_1, ..., u_5 sont les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ inscrits dans les lignes de la matrice M du **b)** : $u_1 = (2, m, 6)$, ... $u_5 = (3, m, -m)$.

III) Exercice

a) Donner l'équation linéaire, ou le système d'équations linéaires, caractérisant dans $\mathbb{R}^3$ l'espace Vect(u_1), avec $u_1 = (1, 1, 2)$.

b) Donner une base et la dimension du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ caractérisé par l'équation $5x - 9y + 2z = 0$.

c) Donner une base de l'intersection entre les espaces vectoriels Vect(u_1) et F.
Quelle est l'interprétation géométrique de ce résultat ?