Université de Strasbourg **2015-2016**
U.F.R. de Mathématiques et Informatique

Algèbre linéaire S2

Contrôle du 17 mars 2016
durée : 1 heure

Questions de cours. — Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}$ une famille de vecteurs de E.

1. Donnez la définition de « $\{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}$ est une famille libre ».

2. Soient F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}$ et $\overrightarrow{w} \in F$. Montrez que la famille $\{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_p}, \overrightarrow{w}\}$ est une famille liée.

Exercice 1. — Pour tout nombre réel m, on considère la matrice $A_m \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A_m = \begin{pmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m^2 & m \\ 1 & m & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculez le déterminant de A_m en fonction du paramètre m (*indication : essayez d'obtenir* $\det(A_m)$ *en fonction de* m *sous forme factorisée*).

2. Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle inversible ?

Exercice 2. — Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille 2×2 à coefficients réels, c'est à dire $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrez que les vecteurs

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de E sont linéairement indépendants.

2. Montrez que tout élément $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de E s'écrit sous la forme $X = \lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K + \lambda_4 L$ et calculez $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ en fonction de a, b, c, d.

3. Que peut-on déduire des questions 1. et 2. sur la famille $\{I, J, K, L\}$?

Exercice 3. — Considérons le système linéaire homogène suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

et soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, ensemble des solutions de ce système.

1. Déterminez une base de F.

2. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, 2, 4)$, $(0, 1, 2)$ et $(2, 3, 6)$. Déterminez une base de G.

3. En déduire que $F \subset G$.