Université de Strasbourg
Licence 1ère année PSI et PC

Mars 2016
Durée 1 heure

Contrôle continu du cours Méthodes Mathématiques de la Physique
(Calculettes et portables non autorisés, documents non autorisés)
(Tout résultat non justifié sera considéré comme inexistant)

Exercice 1 (4 points)

Calculer les limites suivantes :

$a)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{x}$, $b)\ \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^3+x^2}{x^3+2\,x^2}$, $c)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+25}-5}{x}$, $d)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{3^x-2^x}{x}$.

Exercice 2 (3 points)

Soit la fonction :

$$f(x)=\begin{cases} 8a+16x\ , & \text{pour } x<2 \\ a^2(x+2)\ , & \text{pour } x\geq 2 \end{cases}$$

Déterminer la constante a de telle façon que $f(x)$ soit continue en $x=2$. Y a-t-il une seule solution ?

Exercice 3 (6 points)

Calculer les dérivées premières des fonctions suivantes :

$a)\ f(x)=\cos^2(2x)\,e^{-\alpha x}$, $b)\ f(x)=\dfrac{1}{\tan(\alpha x)}$, $c)\ f(x)=\dfrac{\ln(4x)}{x^3}$,

$d)\ f(x)=\ln(2\,x^2-8)$, $e)\ f(x)=\exp\left[(3\,\sqrt{\alpha\,x}-\dfrac{2}{3})^2\right]$, $f)\ f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Exercice 4 (3 points)

On étudie les opérateurs *gradient*, *divergence* et *rotationnel* dans différents systèmes de coordonnées :

a) Donner les définitions de ces opérateurs agissant sur une fonction scalaire $f(x,y,z)$ ou une fonction vectorielle $\vec{F}(x,y,z)$ exprimées en coordonnées cartésiennes.

b) En utilisant l'expression de ces opérateurs en coordonnées cartésiennes démontrer la relation suivante :

$$\mathrm{rot}\left(f\,\vec{F}\right)=\vec{\nabla}\times\left(f\,\vec{F}\right)=\vec{\nabla}f\times\vec{F}+f\,\mathrm{rot}\vec{F}\ ,$$

Exercice 5 (4 points)

Résoudre les intégrales suivantes :

$a)\ \displaystyle\int x\ln x\,dx$, $b)\ \displaystyle\int \frac{5}{x^2+x-6}\,dx$, $c)\ \displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$, $d)\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^3}\,x^2\,dx$.