Université de Strasbourg
Licence 1ère année PSI et PC

Mai 2017
Durée 1 heure

Contrôle continu n° 2 du cours Méthodes Mathématiques de la Physique

(Calculettes et portables non autorisés, documents non autorisés)

(Tout résultat non justifié sera considéré comme inexistant)

Exercice 1 (3 points)

Etudier les séries suivantes et préciser à chaque fois selon quel critère on peut dire que ces séries convergent ou divergent :

$$a)\quad S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}\,, \qquad\qquad b)\quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \cdots\,.$$

Exercice 2 (3 points)

Donner les solutions générales des équations différentielles suivantes :

$$a)\quad 3\,x\,f'(x) - 2\,f(x) = 3\,x^2\,, \qquad\qquad b)\quad x^2\,f'(x) - 2\,f(x) = 0\,.$$

Exercice 3 (4 points)

Donner la solution générale de l'équation différentielle inhomogène

$$f''(x) + 5\,f'(x) + 6\,f(x) = 2\,e^{-x}\,.$$

Quelle est la solution qui satisfait aux conditions initiales

$$f(x=0) = 0, \quad f'(x=0) = 3\;?$$

Exercice 4 (4 points)

Sachant que $f_1(x) = e^{3x}$ est une solution de l'équation différentielle

$$x f''(x) + (x-1) f'(x) + (3 - 12x) f(x) = 0\,,$$

en construire une deuxième par la méthode de la réduction de l'ordre.

Exercice 5 (6 points)

On cherche la solution générale de l'équation différentielle inhomogène

$$3\,x^2\,f''(x) + 5\,x\,f'(x) - f(x) = 4\,x\,.$$

a) On cherche d'abord à résoudre l'équation homogène sous la forme $f(x) = x^\alpha$. Donner les deux solutions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ qui en résultent.

b) Montrer que ces deux solutions forment un système fondamental de l'équation différentielle.

c) Construire explicitement une solution de l'équation différentielle inhomogène par la méthode de la variation des constantes et donner la solution générale de l'équation différentielle.