Exercice 1 (4 points)

Etudier les séries suivantes et préciser à chaque fois selon quel critère on peut dire que ces séries convergent ou divergent :

a) $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 4n + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \mp \cdots$, b) $S_2 = 1 + 2 + 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{2^n}$.

a) S_1 est une série avec signes alternés dont les termes

2pts $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2 - 4n + 1}$ forment une suite zéro ($\lim_{n \to \infty} a_n = 0$)

et qui selon le critère de convergence de Leibniz (théorème 2.13) est donc convergente. page 43

b) A part les 3 premiers termes, le critère de convergence de d'Alembert (théorème 2.19) garantit la convergence de la série S_2 puisqu'avec $a_n = \frac{10}{2^n}$ on obtient $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10}{2^{n+1}} \frac{2^n}{10} = \frac{1}{2} < 1$

2pts

p44

Exercice 2 **(2 + 3 = 5 points)**

Donner la solution des équations différentielles qui satisfont aux conditions initiales :

a) $x\,f'(x) - 3\,f(x) = x^4\,,\qquad f(x{=}1) = 0$

b) $x^3\,f''(x) + 2\,x^2\,f'(x) = 6\,x^3\,,\qquad f(x{=}1) = 1\,,\quad f'(x{=}1) = 4$

a) $x f'(x) - 3 f(x) = x^4 \longrightarrow f'(x) - \frac{3}{x} f(x) = x^3$

qui est une E.D. du premier ordre du type $f'(x) + a(x) f(x) = b(x)$ avec $a(x) = -\frac{3}{x}$ et $b(x) = x^3$. La solution d'une telle E.D. est donnée par $f(x) = \left[C + \int e^{A(x)} b(x)\,dx\right] e^{-A(x)}$ où $A(x) = \int a(x)\,dx$. Dans notre cas $A(x) = -3\ln x$ et donc

$$f(x) = \left[C + \int e^{-3\ln x} x^3\,dx\right] e^{+3\ln x} = \left[C + \int x^{-3} x^3\,dx\right] x^3 = \left[C + x\right] x^3$$
$$= C x^3 + x^4$$

On vérifie en effet aisément que x^3 est la solution de l'E.D. homogène et que x^4 résoud l'E.D. inhomogène. Avec la C.I.

$$f(x{=}1) = C + 1 = 0 \Longrightarrow C = -1$$

on obtient finalement avec $\boxed{f(x) = x^4 - x^3}$ la solution de l'E.D.

2 pts. qui satisfait à la C.I.

b) $x^3 f''(x) + 2x^2 f'(x) = 6x^3$ est une E.D. du 2ème ordre, mais où la fonction $f(x)$ elle-même n'apparaît pas. On peut donc introduire une fonction $g(x) = f'(x)$, ce qui permet d'obtenir une E.D. du 1er ordre $g'(x) + \frac{2}{x} g(x) = 6$ (*) qui peut être résolue comme celle de la partie a). Avec $a(x) = \frac{2}{x}$ et $b(x) = 6$ on obtient $g(x) = \left[C + 6\int e^{2\ln x}\,dx\right] e^{-2\ln x}$ et

$$g(x) = \frac{C}{x^2} + 2x \longrightarrow f(x) = \int g(x)\,dx = -\frac{C}{x} + x^2 + D$$

Avec les C.I. $f(x{=}1) = D - C + 1 = 1$ und $f'(x{=}1) = C + 2 = 4$ on obtient $C = 2$ und $D = +2$ et donc

3 pts $\boxed{f(x) = x^2 + 2 - \frac{2}{x}}$

(*) on divise par x^3 et on remplace $f'(x)$ par $g(x)$ et $f''(x)$ par $g'(x)$.

encore b) au lieu de transformer l'E.D. du $2^{ème}$ ordre en une E.D. du 1^{er} ordre, on peut directement résoudre l'E.D. homogène $x^2 f''(x) + 2x^2 f'(x) = 0$
puisqu'il s'agit d'une E.D. de type Euler, dont les solutions sont données par $f(x) = x^\alpha$. On obtient alors

$$\left[\alpha(\alpha-1) + 2\alpha\right] x^{\alpha+1} = 0$$ avec les solutions $\alpha = 0$ et $\alpha = -1$

On possède donc un système fondamental en $f_1(x) = 1$ et $f_2(x) = \frac{1}{x}$
et il reste à trouver une solution particulière de l'E.D. inhomogène par la méthode de la variation des constantes

$$1\, g_1(x) + \frac{1}{x} g_2(x) = 0$$

$$0 - \frac{1}{x^2} g_2(x) = 6 \qquad g_2(x) = -6x^2 \nearrow g_1(x) = 6x$$

et avec $\int g_1(x)\,dx = 3x^2$ et $\int g_2(x)\,dx = -2x^3$

la solution particulière est donnée par

$$f^p(x) = f_1(x)\int g_1(x)\,dx + f_2(x)\int g_2(x)\,dx = 1\cdot 3x^2 - \frac{1}{x}2x^3 = x^2$$

La solution générale de l'E.D avec 2nd membre est alors

$$f(x) = C_1 + C_2\frac{1}{x} + x^2 \qquad f'(x) = -\frac{C_2}{x^2} + 2x$$

et les C.I $f(x=1) = C_1 + C_2 + 1 = 1$ et $f'(x=1) = 2 - C_2 = 4$
donnent alors $C_2 = -2$ et $C_1 = 2$ donc la solution finale

$$\underline{f(x) = 2 - \frac{2}{x} + x^2}$$

Exercice 3 (4 points)

Pour pouvoir donner la solution générale de l'équation différentielle

$$xf''(x) + (x-1)f'(x) + (3-12x)f(x) = 0\,,$$

et sachant que $f_1(x) = e^{3x}$ est une solution de l'équation différentielle, en construire une deuxième par la méthode de la réduction de l'ordre.

On pose $f_2(x) = f_1(x)\,G(x) = e^{3x}\,G(x)$

$$f_2'(x) = [3G(x) + G'(x)]e^{3x}$$

$$f_2''(x) = [9G(x) + \underline{3G'(x) + 3G'(x)} + G''(x)]e^{3x}$$

ce qui, mis dans l'E.D. donne

$$\{x[9G(x) + 6G'(x) + G''(x)] + (x-1)[3G(x) + G'(x)] + (3-12x)G(x)\}e^{3x} = 0$$

$$xG''(x) + [6x + x - 1]G'(x) + [9x + 3x - \cancel{3} + \cancel{3} - 12x]G(x) = 0$$

$$xG''(x) + (7x-1)G'(x) = 0 \Rightarrow g'(x) + \left(7 - \frac{1}{x}\right)g(x) = 0$$

On résoud l'E.D. du premier ordre avec $a(x) = 7 - \frac{1}{x} \to A(x) = 7x - \ln x$

$$g(x) = C e^{-7x} e^{+\ln x} = C x e^{-7x}$$

intégration par partie $u = -\frac{1}{7}e^{-7x}$ $v = x$; $u' = e^{-7x}$ $v' = 1$

$$G(x) = \int g(x)\,dx = \int x e^{-7x}\,dx = -\frac{x}{7}e^{-7x} + \frac{1}{7}\int e^{-7x}\,dx = \left(-\frac{x}{7} - \frac{1}{49}\right)e^{-7x}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_2(x) = f_1(x)G(x) = (1+7x)e^{-4x}}$$

Test : $f_2'(x) = [-4(1+7x) + 7]e^{-4x} = (7 - 4 - 28x)e^{-4x} = (3 - 28x)e^{-4x}$

$$f_2''(x) = [-4(3-28x) - 28]e^{-4x} = (-28 - 12 + 112x)e^{-4x} = (112x - 40)e^{-4x}$$

$$[x(112x - 40) + (x-1)(3-28x) + (3-12x)(1+7x)]e^{-4x} =$$

$$= [112x^2 - 40x + 3x - \cancel{3} - 28x^2 + 28x + \cancel{3} + 21x - 12x - 84x^2]e^{-4x} = 0$$

ok

4 pts

Exercice 4 (3 points)

Trouver un système fondamental pour les équations différentielles suivantes

a) $f''(x) + 3\,f'(x) + 2\,f(x) = 0$ b) $f'''(x) - f''(x) + f'(x) - f(x) = 0$.

a) $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = 0$ polyn. caract. $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$

$\underline{f_1(x) = e^{-x}}$ $f_1'(x) = -e^{-x}$ $f_1''(x) = +e^{-x}$ $(1-3+2)e^{-x} = 0$

$\underline{f_2(x) = e^{-2x}}$ $f_2'(x) = -2e^{-2x}$ $f_2'' = 4e^{-2x}$ $(4-6+2)e^{-2x} = 0$ ok

2pts

b) $f'''(x) - f''(x) + f'(x) - f(x) = 0$ $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ (polynome caractéristique)

$\lambda = 1$ est solution $\Longrightarrow$ division euclidienne

$$(\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1) : (\lambda - 1) = \lambda^2 + 1$$
$$\underline{-(\lambda^3 - \lambda^2)}$$
$$\lambda - 1$$
$$\underline{-(\lambda - 1)}$$
$$0$$

$\Longrightarrow \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$
$= (\lambda - 1)(\lambda + i)(\lambda - i)$

et les solutions sont

$f_1(x) = e^{x}$ $f_2(x) = e^{ix}$ $f_3(x) = e^{-ix}$

ou

$f_1(x) = e^{x}$ $f_2(x) = \cos x$ $f_3(x) = \sin x$

1 pt

Exercice 5 (4 points)

Ayant résolu l'équation différentielle homogène on connait en $f_1(x)=x^{5/2}$ et $f_2(x)=x^{-1/2}$ un système fondamental de l'équation différentielle

$$4\,x^2\,f''(x) - 4\,x\,f'(x) - 5\,f(x) = -10\,x^2\,.$$

En utilisant la méthode de variation des constantes, déterminer une solution particulière $f^*(x)$ de l'équation différentielle inhomogène.

Méthode de la variation des constantes avec $f_1(x) = x^{5/2}$ et $f_2(x) = x^{-\frac{1}{2}}$

$$x^{5/2}\,g_1(x) + x^{-1/2}\,g_2(x) = 0$$

$$\frac{5}{2}x^{3/2}\,g_1(x) - \frac{1}{2}x^{-3/2}\,g_2(x) = \frac{-10x^2}{4x^2} = -\frac{5}{2}$$

méthode de Cramer :

$$D = \begin{vmatrix} x^{5/2} & x^{-1/2} \\ \frac{5}{2}x^{3/2} & -\frac{1}{2}x^{-3/2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\right)x = -3x$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^{-1/2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2}x^{-3/2} \end{vmatrix} = +\frac{5}{2}x^{-1/2} \qquad g_1(x) = \frac{D_1}{D} = -\frac{5}{6}x^{-3/2}$$

$$\int g_1(x)\,dx = \frac{5}{3}x^{-1/2}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} x^{5/2} & 0 \\ \frac{5}{2}x^{3/2} & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} = -\frac{5}{2}x^{5/2} \qquad g_2(x) = \frac{D_2}{D} = +\frac{5}{6}x^{3/2}$$

$$\int g_2(x)\,dx = \frac{1}{3}x^{5/2}$$

$$f^*(x) = f_1(x)\int g_1(x)dx + f_2(x)\int g_2(x)\,dx =$$

$$\boxed{f^*(x) = \frac{5}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^2 = 2x^2}$$

Test : $4x^2\cdot 4 - 4x\cdot 4x - 5\cdot 2x^2 = 16x^2 - 16x^2 - 10x^2 = -10x^2$ ok!

4 pts