Université de Strasbourg
Licence 1ère année PSI et PC

Juin 2016
Durée : 90 minutes

Examen de remplacement du cours Méthodes Mathématiques de la Physique

(Calculettes et portables non autorisés, documents non autorisés)

(Tout résultat non justifié sera considéré comme inexistant)

Exercice 1

(2 points) Calculer les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\ , \qquad b)\ \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}\ .$$

Exercice 2

(3 points)

Calculer les dérivées premières des fonctions suivantes :

$$a)\ f(x) = \frac{\ln x}{x-1}\ , \qquad b)\ f(x) = \cos^2(3x^2-1)\ , \qquad c)\ f(x) = \arccos x\ .$$

Exercice 3

(3 points)

Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a)}\ \int x\, e^{-x^2}\, dx\ , \qquad \text{b)}\ \int x\, (\ln x)^2\, dx\ , \qquad \text{c)}\ \int \frac{x-3}{x^2-1}\, dx\ .$$

Exercice 4

(3 points)

On étudie les opérateurs vectoriels *gradient*, *divergence*, *rotationel* et *Laplacien* dans différents systèmes de coordonnées :

a) Donner les définitions de ces opérateurs vectoriels agissant sur une fonction scalaire $f(x, y, z)$ ou une fonction vectorielle $\vec{F}(x, y, z)$ exprimées en coordonnées cartésiennes.

b) En utilisant l'expression en coordonnées cartésiennes des opérateurs vectoriels *divergence* et *gradient* démontrer que

$$\operatorname{div}\left[\vec{\nabla} f(\vec{r})\right] = \vec{\nabla}\cdot\left[\vec{\nabla} f(\vec{r})\right] = \Delta f(\vec{r})\ .$$

Exercice 5

(3 points)

Etudier les séries suivantes et expliquer selon quel critères on peut dire que ces séries convergent ou divergent :

$$\text{a)}\ S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ , \qquad \text{b)}\ S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\ .$$

Exercice 6 (2 points)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $3\,x\,f'(x) - 2\,f(x) = 3\,x^2$. b) $x^2\,f'(x) - 2\,f(x) = 0$.

Exercice 7 (4 points)

Donner la solution générale de l'équation différentielle

$$3\,x^2\,f''(x) + 5\,x\,f'(x) - f(x) = 4\,x \ .$$