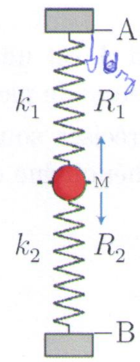
Université de Strasbourg — Mars 2014

Licence 1re année Chimie, PSI, STUE, MPC — Durée 1 heure

Contrôle continu du cours Vibrations et Ondes

(Calculettes et portables non autorisés, documents non autorisés)

(**Tout résultat non justifié sera considéré comme inexistant**)



Dans un référentiel supposé galiléen, un point matériel M de masse m soumis à la pesanteur est relié à deux points fixes A et B par deux ressorts R_1 et R_2 de même longueur à vide ℓ_o et de raideurs respectives k_1 et k_2. La distance $\overline{\mathrm{AB}}$ vaut L avec $\mathrm{L} > 2\,\ell_o$. Ce dispositif est orienté verticalement (voir figure ci-contre) et on choisira l'axe Oz, de vecteur unitaire $\vec{u}_z$, comme étant orienté vers le bas avec l'origine O au point A. Dans tout le problème, on supposera que le mouvement se fait uniquement le long de l'axe Oz. Dans les parties 1 et 2 de l'exercice on néglige les forces de frottement.

Les questions 1 à 4 pourront être traitées indépendamment.

5 P 1) Dans un premier temps, le ressort R_2 est absent et le point matériel M est donc uniquement relié au ressort R_1.

a) Établir le bilan des forces qui s'exercent sur M.

b) Déterminer la position d'équilibre z_{eq} de M.

c) Établir à partir de la relation fondamentale de la dynamique, l'équation différentielle du mouvement.

d) En vous aidant d'un changement de variable que l'on précisera, montrer que l'équation différentielle obtenue est celle d'un oscillateur harmonique. Quelles sont ses solutions générales ?

6 P 2) Dans un deuxième temps, le ressort R_2 est également présent (situation de la figure ci-dessus).

a) Établir le bilan des forces qui s'exercent sur M.

b) Déterminer la nouvelle position d'équilibre z_{eq}.

c) Établir l'équation différentielle du mouvement. Le mouvement est-il harmonique ? Justifier votre réponse.

4 P 3) On tient compte maintenant d'une force de frottement supplémentaire, $\vec{F}_v = -f_o\,\vec{v}$, proportionelle à la vitesse $\vec{v}$ et toujours opposée au mouvement. Le coefficient f_o est positif.

a) Établir l'équation différentielle du mouvement.

b) Donner les solutions générales dans le cas d'un *amortissement faible*.

5 P 4) Un vibreur exerce au point A du système précédent une force dépendant du temps qui se traduit sur M par la force supplémentaire

$$\vec{F}_{\text{vib}} = F_{\text{o}} \cos(\Omega t)\, \vec{u}_z$$

où F_{o} et Ω sont deux constantes positives.

a) Établir l'équation différentielle du mouvement.

b) Démontrer qu'aux temps longs (régime permanent, $t \to \infty$), la solution peut être écrite sous la forme

$$z(t) = z_{\text{eq}} + A \cos(\Omega t + \Phi) \ .$$

où A est une quantité que l'on exprimera en fonction de F_{o}, f_{o}, m, ω_0 et Ω. On ne demande pas de déterminer Φ.

c) Préciser sous quelles conditions et pour quelle valeur de Ω on pourra observer un phénomène de résonance d'amplitude.

$$\sin(\Psi + \Phi) = \sin(\Psi)\cos(\Phi) + \cos(\Psi)\sin(\Phi)$$
$$\cos(\Psi + \Phi) = \cos(\Psi)\cos(\Phi) - \sin(\Psi)\sin(\Phi)$$