Université de Strasbourg
Licence 1ère année PSI

Avril 2013
Durée 1 heure

Contrôle continu du cours Vibrations et Ondes

(Calculettes et portables non autorisés, documents non autorisés)

(Tout résultat non justifié sera considéré comme inexistant)

Problème 1

Partie A

Une corde de violoncelle de masse linéique $\mu = 5\cdot 10^{-5}$ kg/m, dirigée suivant l'axe Ox, est tendue avec une tension de $\mathrm{T} = 50$ N. La déviation de la corde de sa position d'équilibre est donnée par une fonction $y(x,t)$ qui satisfait à l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\mathrm{T}}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 .$$

1) Déterminer la vitesse v avec laquelle une telle onde transverse progressive peut se déplacer le long de l'axe Ox.

2) La corde est accrochée à ses deux extrémités en $x=0$ et en $x=L$, de sorte que $y(x=0,t) = y(x=L,t) = 0$. Pour simplifier la description, on cherchera une solution de l'équation des ondes sous la forme

$$y(x,t) = y_o \cos(\omega t)\sin(kx) .$$

a) Utiliser l'équation des ondes et sa solution pour trouver une relation entre k, ω, μ et T.

b) Quelles sont les valeurs de k compatibles avec les conditions aux limites données ci-dessus.

c) Déterminer en fonction de L et de v les fréquences propres ν et les longueurs d'ondes λ qui y sont associées.

Partie B

3) On étudie ensuite des ondes longitudinales formées dans un tuyau d'orgue, de longueur L, fermé à l'extrémité placée en $x=0$ et ouvert à l'extrémité placée en $x=L$. On crée dans le tuyau d'orgue une onde stationnaire de pression p, où la fonction $p(x,t)$ est solution de l'équation des ondes

$$\rho\,\chi_c\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

où ρ est la masse volumique et χ_c la compressibilité de l'air. Exprimer la vitesse v de l'onde sonore en fonction de ρ et de χ_c.

4) Les conditions aux limites sont désormais

$$p(x=L,t) = p_o \text{ en } x=L, \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x=0,t} = 0 \text{ en } x=0$$

où p_o est la pression atmosphérique. On cherchera une solution sous la forme

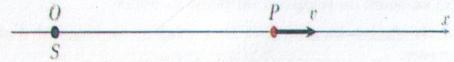
$$p(x,t) = p_o + \Delta p\cos(\omega t)\cos(kx) .$$

2. *Première application* : Les grandes orgues sont constituées de deux types de tuyaux : des tuyaux ouverts à leurs deux extrémités (tuyau ouvert-ouvert) ou des tuyaux dont l'une des deux extrémités est ouverte et l'autre fermée (tuyau ouvert-fermé). Ces grandes orgues peuvent produire des notes très graves. Calculer grossièrement la longueur d'onde d'un son de fréquence 33 Hz en prenant $c = 330$ m.s^{-1} pour la vitesse du son. Calculer la longueur minimale d'un tuyau produisant ce son.

3. *Deuxième application* : On modélise très grossièrement une clarinette par un tube de longueur L, fermé au niveau de l'embouchure et ouvert à l'extrémité de l'instrument.
   a) Expliquer pourquoi le son produit par une clarinette ne comporte que des harmoniques impairs.
   b) L'instrument est muni d'une clé qui ouvre un trou situé à une distance $\frac{L}{3}$ de l'embouchure. Lorsque ce trou est ouvert, la surpression est nulle en ce point. Quelles sont dans ce cas les longueur d'ondes des modes propres du tuyau ? Quel est l'effet de l'ouverture du trou sur la fréquence du son émis par l'instrument ?

Exercice n° 2

On considère un sonar S constitué d'un émetteur et d'un récepteur d'ondes acoustiques. Il se trouve à bord d'un bateau de pêche et est utilisé pour détecter les bancs de poissons. Il émet des ondes qui se propagent dans la mer avec la célérité c (norme de la vitesse des ondes acoustiques dans l'eau de mer).
Le sonar est immobile et situé en O sous la surface de la mer. Les ondes émises par le sonar S sont réfléchies par un poisson P. Celui-ci se déplace sur le demi-axe Ox à la vitesse algébrique constante ($0 < v < c$ si P s'éloigne de O). À l'instant $t_1 = 0$ la distance OP est D. Les ondes réfléchies par le poisson reviennent en O où elles sont détectées par le sonar.



1. Le sonar émet deux impulsions sonores très brèves aux instants $t_1 = 0$ et $t_2 = T$. Soient t'_1 et t'_2 les temps où ces impulsions parviennent au poisson et t''_1 et t''_2, les instants où les impulsions reviennent en O après réflexion sur le poisson. On pose $T'' = t''_2 - t''_1$.
   a) Déterminer t'_1 et t'_2 en fonction de c, T, v et D.
   b) Calculer t''_1 et t''_2 en fonction de c, T, v et D.
   c) Démontrer que T'' s'écrit
   $$T'' = \frac{c+v}{c-v}T$$
   d) Déterminer v en fonction de c, T et T''.
   e) Déterminer D en fonction de c, T, t''_1 et T''.
2. Le sonar S émet une onde de fréquence f.
   a) Quelle est la fréquence f' du signal reçu par le poisson P ?
   b) Quelle est la fréquence f'' du signal reçu par le sonar après réflexion sur le poisson ?
   c) On pose $\Delta f = f'' - f$. Montrer que la vitesse v du poisson s'exprime en fonction de c, f et Δf.

Rappels : (ces rappels ne sont pas indispensables pour répondre aux questions posées)

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ et $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$