Licence de Physique
Licence Sciences pour l'Ingénieur
Licence de Chimie
Licence de Physique Chimie
Licence Sciences de la Terre

21 Avril 2016

Contrôle continu de Vibrations-Ondes n° 2

Aucun document n'est autorisé - Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Durée de l'épreuve : 1 heure et 30 minutes.

Questions de cours

1. Énoncer l'équation d'onde et préciser ses solutions générales.
2. Donner la définition mathématique d'une onde sinusoïdale qui se propage le long d'un axe Ox vers les x croissants. On notera A, l'amplitude de l'onde, ω sa pulsation, et λ la longueur d'onde. Donner la relation entre ω et λ et préciser leurs dimensions.
   On supposera qu'initialement, en $x = 0$, l'onde est nulle. Représenter sur deux schémas :
   a) l'allure de l'onde en fonction de x à un instant donné t,
   b) l'allure de l'onde au cours du temps en un point x_0 donné.

   Vous indiquerez dans chaque cas les grandeurs (la période T, la longueur d'onde λ, etc.) qui vous semblent pertinentes.
3. Donner la définition d'une onde stationnaire.
4. Donner la définition d'un nœud et d'un ventre de vibration. Quelle est la distance entre deux nœuds de vibration ?

Exercice n° 1

La colonne d'air contenue dans un instrument à vent (flûte, clarinette ...) ou dans un tuyau d'orgue vibre selon des modes propres correspondant à des conditions aux limites données. Dans une modélisation très simple, on envisage deux types de conditions :

- si l'extrémité du tuyau est ouverte, la surpression acoustique $\Delta p(x,t)$ est nulle à cette extrémité (continuité de la pression $p(x,t)$ à cette extrémité).
- si l'extrémité du tuyau est fermée, l'amplitude de variation de la surpression acoustique est maximale à cette extrémité $\left(\left.\frac{\partial \Delta p(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\text{extrémité}} = 0\right)$.

1. On considère un tuyau de longueur L dans lequel la célérité des ondes sonores est c (norme de la vitesse de propagation des ondes sonores dans l'air).
   a) Déterminer les fréquences des modes propres du tuyau lorsque ses deux extrémités sont ouvertes. Représenter schématiquement la surpression $\Delta p(x,t)$ dans le tuyau pour le troisième mode, les modes étant classés par fréquence croissante.
   b) Même questions si l'une des extrémités du tuyau est ouverte et l'autre fermée : déterminer les fréquences des modes propres du tuyau et représenter schématiquement la surpression $\Delta p(x,t)$ dans le tuyau pour le troisième mode.

a) Déterminer les valeurs de k compatibles avec les conditions aux limites données ci-dessus.

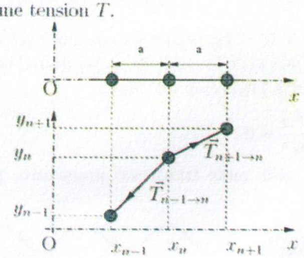
b) Quelles sont, en fonction de L et de v, les valeurs de la fréquence ν et de la longueur d'ondes λ qui y sont associées.

Problème 2

On considère une chaine de N boules, chacune de masses m, séparées par une distance à l'équilibre a et reliées par des fils de masses négligeables. La chaine ainsi constituée est tendue avec une tension T.

À l'équilibre

Hors équilibre



La boule numéro $n\,(1 \leq n \leq N)$ située, à l'équilibre, au point de coordonnées $(x_n = na, 0)$ se trouve, hors équilibre, au point de coordonnées $(x_n = na, y_n(t))$ (on néglige son déplacement le long de l'axe Ox et on supposera $y_n(t) \ll a$). La boule $n-1$ exerce une force $\vec{T}_{n-1\to n}$ sur la boule n qui est également soumise à une force $\vec{T}_{n+1\to n}$ exercée par la boule $n+1$ (voir figure).

1) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la boule n, montrer que :

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2} = \omega_0^2 \left[y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n\right], \quad 1 \leq n \leq N \qquad (1)$$

où ω_0^2 est une constante dont on donnera l'expression en fonction de T, m et a.

2) On s'intéresse aux solutions qui peuvent s'écrire sous la forme d'une onde progressive de la forme

$$y_n(t) = y_0 \cos(\omega t - kna)$$

où y_0 est une amplitude de déplacement réelle et k a la dimension d'un vecteur d'onde. Montrer que cette hypothèse conduit à la relation de dispersion

$$\omega = \Omega_0 \left|\sin\left(\frac{ka}{2}\right)\right|$$

où Ω_0 est une constante que l'on exprimera en fonction de ω_0, puis de T, m et a. Représenter la courbe de dispersion, $\omega(k)$ pour $k \in [-\pi/a, \pi/a]$ (pourquoi la limitation de k à cet intervalle ?). Quel est le sens physique de la transformation de k en $-k$?

3) Donner l'expression de la vitesse de phase v_φ. En justifiant votre réponse, indiquer si le milieu est dispersif.

Relations trigonométiques utiles :

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta \mp \sin\alpha\,\sin\beta$$

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\alpha\right]$$