cc1

Université de Strasbourg Octobre 2014

Contrôle continu, fonctions à plusieurs variables, L2 S3 Physique

Responsable : M.Delage Durée 1h30

Questions de cours :

1) On se place dans l'espace vectoriel E muni d'une norme $||.||$, X un ouvert de E et $f : X \to \mathbb{R}$, donnez la définition d'une fonction continue en un point $a \in X$.

2) Soit $f : X \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, avec X un ouvert et a un point de X . Que veut dire : "f admet une dérivé en a suivant un vecteur v" ?

3) Soit $f : X \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, avec X un ouvert et $a = (a_1, a_2)$ un point de X. Donnez le développement limité à l'ordre 1 de f en a.

4) Donnez la définition puis une interprétation géométrique du gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

5) Soit $f : X \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

Peut-on dire que f est C^2 ?

Exercice 1 :

Etudiez l'existence et la valeur éventuelle d'une limite, au point précisé, pour les fonctions suivantes :

1) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x+y}$ en $(0,0)$.

2) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ en $(0,0)$.

3) $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^2}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$.

4) $f(x,y) = \dfrac{ln(x+y)}{x^2+2xy+y^2-1}$ en $(1,0)$. On pourra évaluer au préalable $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{ln(x)}{x^2-1}$.

Exercice 2 :

Etudiez la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Exercice 3 :

Déterminez les valeurs et la nature des extremums locaux (et préciser s'ils sont, ou non, globaux) des applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1) $f(x,y) = x^4 + x^2 + y^2 + y^4$.

2) $f(x,y) = x^3 + 2xy - 5x + 5y$.

3) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.
Indication : On pourra montrer que $f(x,y) + 2 \geq (x^2-1)^2 + (y^2-1)^2$.