Contrôle continu de mathématiques : fonctions à plusieurs variables
L2-S3 octobre 2015

Responsable : Delage Florian — durée : 1h30min

L'usage de tout ouvrage de référence, notes de cours, calculatrice ou téléphone est rigoureusement interdit.

Questions de cours ($\approx$ 5pts)

1. Donner la définition d'une norme $||.||$ sur un espace vectoriel E.
2. Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f :\to \mathbb{R}$ et $a \in X$. Donner la définition mathématique de "f admet l comme limite en a".
3. Donner la définition du gradient de $f : X \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
4. Enoncer le théorème de Schwarz (concernant les dérivées partielles seconde).

Exercice 1 ($\approx$ 5pts)

Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

1. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|}}$ en $(0,0)$.
2. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$ en $(0,0)$.
3. $f(x,y) = \dfrac{x^6 y}{x^4+y^4}$ en $(0,0)$ (on pourra, par exemple, montrer que $sin^4(\theta)+cos^4(\theta)-\frac{1}{2} \geq 0$).

Exercice 2 ($\approx$ 6pts) Les fonctions suivantes sont elles continues? C^1?

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ en } (0,0) \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{sin(x^3+y3)}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ en } (0,0) \end{cases}$

Exercice 3 ($\approx$ 6pts)

Etudier les extremums locaux et/ou globaux des fonctions suivantes, si $rt - s^2 = 0$, on se contentera de dire que l'on ne peut pas conclure par cette méthode.

1. $f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$.
2. $f(x,y) = (x+y)^2 - (x^4+y^4)$ (*indication* : on pourra s'intéresser à l'expression $-(x^2-1)^2 - (y^2-1)^2 - (x-y)^2$).

Exercice 4($\approx$ 5ps)

1. On donne l'équation de l'ellipse $\epsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 5\}$ determiner les extremums de $f(x,y) = x + y$ où (x,y) est un point de ϵ. (On donnera une justification complète).
2. Déterminer par le théorème des extrema liés parmi les baignoires ayant un volume intérieur V_0 de forme parallélepipedique rectangle (déterminée par la longueur, la largeur et la hauteur) celle dont la surface intérieure est minimum.