Contrôle continu de mathématiques : fonctions à plusieurs variables
L2-S3 novembre 2015

Responsable : Delage Florian — durée : 1h30min

L'usage de tout ouvrage de référence, notes de cours, calculatrice ou téléphone est rigoureusement interdit.

Questions de cours ($\approx$ 5pts)

1. Donner le théorème des fonctions implicites.
2. Donner la définition d'une forme différentielle exacte et d'une forme différentielle fermée.
3. Soit un champ de vecteur $V(x,y) = (V_1(x,y), V_2(x,y))$ donner la définition de la circulation de V le long d'une courbe γ définie par
$$\gamma : t \in [a,b] \to (x(t), y(t)).$$
4. Soit un champ de vecteur $F : X \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 montrer que $div(rot(F)) = 0$.

Exercice 1 ($\approx$ 5pts)

1. Montrer que la relation $f(x,y) = x^3 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0$ définie implicitement y comme une fonction ϕ de x au voisinage de $(1,1)$.
2. Donner un développement limité à l'ordre 2 de cette fonction ϕ en un voisinage de $(1,1)$.
3. Donner l'allure de la courbe définie par l'équation $f(x,y) = 0$ au voisinage de $(1,1)$.

Exercice 2 ($\approx$ 4pts) Soit $a > 0$, on considère la courbe d'équation :

$$t \in [0, 2\pi] \to (2acos(t) + acos(2t), 2asin(t) - asin(2t))$$

Calculer l'aire délimitée par cette courbe.

Exercice 3 ($\approx$ 5pts) On considère l'équation $E : 2sin(y\cancel{(x)}^2) + xy\cancel{(x)}cos(y\cancel{(x)}^2)y'\cancel{(x)}$. On introduit aussi la forme différentielle suivante :

$$w = (2sin(y\cancel{(x)}^2))dx + (xy\cancel{(x)}cos(y\cancel{(x)}^2))dy$$

1. Montrer que w n'et pas exacte.
2. Montrer que $\phi(x)w(x,y)$ est une forme exacte si on prend $\phi(x) = x^3$ (on pourra, pour un point bonus, expliquer comment on trouve cette fonction $\phi(x)$ telle que ϕw soit exacte).
3. Résoudre implicitement l'équation différentielle E.

Exercice 4 ($\approx$ 5pts)

1. Calculer la circulation du champ de vecteurs $V(x,y) = (xy, 2x^2)$ le long du cercle de centre $(1,0)$ de rayon 1.
2. On pose $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0, y \leq x+1, y \leq -x+1, x \in [-1,1]\}$. Dessiner le domaine D puis calculer
$$\iint_D xydxdy.$$

(11, 15)