Université de Strasbourg CC 3 16 Janvier 2013

Examen fonctions à plusieurs variables, L2 S3 Physique
Contrôle continu

Responsable : M.Delage

Durée de l'épreuve : 2 heures
Aucun document ou calculatrice n'est autorisé

Questions de cours

1) Enoncer le théorème d'Ostrogradski.

2) On considère D un compact de $\mathbb{R}^2$, une fonction de classe C^1 $F : D \to \mathbb{R}^3$, et la surface $S = \{(F(x,y)|(x,y) \in D\}$. Donner la définition de l'intégrale de surface de $f : S \to \mathbb{R}$ sur D (où f est de classe C^1).

3) Donner la définition du centre d'inertie d'un solide (Δ, σ).

4) Enoncer le théorème de Stockes.

Exercices

1) Dessiner le domaine $\mathcal{D}$ situé en dessous de l'arc de cycloïde $t \to (R(t - sin(t)), R(1 - cos(t)))$ et au dessus de l'axe $y = 0$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Calculer l'aire de $\mathcal{D}$.

2) Calculer $I = \iint_D xydxdy$ avec D le demi-disque $y \geq 0$ d'équation $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

3) Calculer $J = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in [0,a], 0 \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2}\}$.

4) On considère la surface paramétrée par $F(u,v) = ((R+rcos(v))cos(u), (R+rcos(v))sin(u), rsin(v))$ avec $u, v \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ et $r < R$. Dessiner et calculer l'aire de cette surface.

5) Calculer $H = \iiint_\Delta \frac{1}{(x+y+z+1)^3}dxdydz$ avec $\Delta = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$.

6) On se place dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on considère le champ de vecteur :

$$F(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\vec{i} + x\vec{j}) \quad \text{ailleurs que sur l'axe } Oz$$

i) Calculer le rotationnel de F.
ii) On considère $\gamma : t \in [0, 2\pi] \to (Rcos(t), Rsin(t), h)$ avec $R, h > 0$. Calculer la circulation de F le long de γ.
iii) Calculer le Flux de F à travers le disque situé dans le plan xOy centré en $(2,0,0)$ de rayon 1.

7) On considère le solide constitué du demi ellipsoïde homogène (Δ, ρ) avec $\Delta = \{(x,y,z)|\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0, a, b, c > 0\}$. Calculer son centre de gravité.

8) Calculer le flux sortant de $w(x,y,z) = (xyz, xyz, xyz)$ à travers le tétraèdre $ABCD$ avec $A = (a,0,0)$, $B = (0,b,0)$, $C = (0,0,c)$, $D = (0,0,0)$.