Contrôle continu de mathématiques : fonctions à plusieurs variables
L2-S3 Janvier 2016

Responsable : Delage Florian durée : 2h

L'usage de tout ouvrage de référence, notes de cours, calculatrice ou téléphone est rigoureusement interdit.

Exercice 1 On considère le domaine D délimité par l'intersection des courbes γ_1 et γ_2 d'équations :

$$y = -\frac{2}{\pi}x + 1 \text{ ,respectivement, } y = \cos(x).$$

On note $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ le bord de D orienté dans le sens direct.

1. Faire un schéma et donner les paramétrisations des courbes γ_1 et γ_2.
2. Ennoncer et vérifier le théorème de Green-Riemann en calculant de deux façon la circulation de

$$\omega(x, y) = x^2dx + ydy$$

le long de γ.

Exercice 2 On considère le volume V délimité par les surfaces $x = 2, y^2+z^2 = 9$ et tel que $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. On considère aussi un champ de vecteur

$$X(x, y, z) = (2x^2y, -y^2, 4xz^2).$$

1. Faire un schéma de V. Donner une paramétrisation de la surface S_1 définie comme l'intersection de V et du plan $x = 0$.
2. Calculer le flux de X à travers S_1.
3. Calculer $\iiint_V div(X)dxdydz$.

Exercice 3 On considère le volume $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ et un champ de vecteur $F(x, y, z) = (x.(x^2 + y^2 + z^2), y.(x^2 + y^2 + z^2), z.(x^2 + y^2 + z^2))$.

Ennoncer et vérifier le théorème de Green-Ostrogradsky on calculant de deux façons différentes le flux de F à travers la surface Σ délimitant V.(On précisera bien les étapes de raisonnements).

Exercice 4 On considère la demi-boule de rayon R centrée en $(0, 0, 0)$ telle que $z \geq 0$ et le cylindre plein centré en $(0, R/2, 0)$ de rayon $R/2$. On veut calculer le volume de la portion A définie comme l'intersection de la demi-boule de du cylindre.

1. Faire un schéma.
2. Démontrer que le volume peut s'exprimer par :

$$Vol(A)) = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{Rsin(\theta)}\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} rdzdrd\theta.$$

3. Calculer $Vol(A)$.