UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

L2-Physique

Méthodes mathématiques pour la physique

Premier contrôle continu 2014

Documents, calculatrice et téléphones portables interdits

Exercice 1

1 Soit

$$E = \left\{ v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ , \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \ \text{ et } \ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\} .$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En donner une base.
2 Completer la base obtenue dans la question **1** en une base de $\mathbb{R}^4$.
3 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

que l'on note $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. Trouver une condition sur x_1, x_2, x_3, x_4 pour que le vecteur

$$w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

appartienne à $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

Exercice 2

Soit f une application de $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2) .$$

1 Soient $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$.

2 Déterminer $\text{Im}(F)$ et $\text{Ker}(f)$ et donner une base et la dimension de chacun.

3 L'application f est-elle injective, surjective ?

Fin