Méthodes mathématiques pour la physique : contrôle continu n°1
documents interdits, calculatrice non-autorisée, durée 1h

Nom: ______________________, Filière _____

02/11/2016

1 Famille génératrice de vecteurs

Soient les trois vecteurs $a_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $a_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

a) Montrer que les trois vecteurs forment une famille génératrice du $\mathbb{R}^3$. Forment-ils aussi une base ? Démontrer.

b) Si on voit maintenant les vecteurs a_1, a_2, a_3 comme des vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$a_1 \to b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, a_2 \to b_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, a_3 \to b_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Comment peut-on à partir des vecteurs b_1, b_2, b_3 obtenir une base de $\mathbb{R}^4$? Exprimer le vecteur $x = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\5\end{pmatrix}$ dans la base ainsi construite.

2 Sous-espaces vectoriels

Soient les deux vecteurs $b_1 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}$ and $b_2 = \begin{pmatrix}8\\0\\6\\4\end{pmatrix}$.

a) Soient e_1, e_2, e_3 et e_4 les vecteurs de base canoniques du $\mathbb{R}^4$. Démontrer que $B = \mathrm{Vect}\{b_1, b_2\}$ en est un sous-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

b) Quelle(s) relation(s) entre les composantes d'un vecteur $y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$ appartenant à B a-t-on ?

3 Applications linéaires

Soient f une application linéaire de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avec $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3, 6x_1 + 2x_2 - 2x_3)$ et $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a) Calculer les trois vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$. Forment-ils une base de $\mathrm{Img}(f)$?

b) Calculer le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de l'application. Quelle est sa dimension ? Qu'en concluez-vous par rapport à la dimension de $\mathrm{Img}(f)$?

c) Que $\mathrm{Img}(f)$ représente-t-elle géométriquement dans le $\mathbb{R}^3$?

d) Comment peut en caractériser l'application f : surjective, injective, bijective, endomorphisme, automorphisme, isomorphisme ?