

# Méthodes mathématiques pour la physique

## Contrôle continu, décembre 2014

Documents, calculatrice et téléphones portables interdits

### Exercice 1

Soit la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt, \quad f(x, t) = \frac{1}{x^2 e^{-t} + t^2}.$$

1 Quelle est l'ensemble de définition de  $F$  ?

2 On considère maintenant que  $x \in ]0, \infty[$ . Montrer que  $\forall a > 0, \forall x \in [a, +\infty[$  il existe une fonction  $\varphi$  telle que

$$|f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

En déduire que  $F$  est continue sur  $[a, +\infty[$  puis sur  $]0, +\infty[$ .

3 On considère toujours  $x \in ]0, \infty[$ . Montrer que  $\forall A > a > 0, \forall x \in [a, A]$  il existe une fonction  $\psi$  telle que

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right| \leq \psi(t).$$

En déduire que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ . Peut-on dériver sous le signe somme ?

### Exercice 2

Diagonaliser la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fin