UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

L2-Physique

Méthodes mathématiques pour la physique

Contrôle continu, janvier 2015

Documents, calculatrice et téléphones portables interdits

Exercice 1

1 Soit $\mathcal{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère les deux familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \Big\{e_1 = -i + j + k \ , \quad e_2 = i - j + k \ , \quad e_3 = i + j - k\Big\} \ ,\\ \mathcal{F} &= \Big\{f_1 = 2i + j + k \ , \quad f_2 = i + 2j + k \ , \quad f_3 = i + j + 2k\Big\} \ .\end{aligned}$$

1.1 Montrer que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont deux bases de $\mathbb{R}^3$.

1.2 Exprimer les vecteurs de la base $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{E}$ et les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{F}$.

2 Soit maintenant une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par:

$$\begin{aligned} f(f_1) &= e_1 \ ,\\ f(f_2) &= e_2 \ ,\\ f(f_3) &= e_3 \ .\end{aligned}$$

Calculer l'image et le noyau de f.

3 Soit enfin une application lineaire g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée dans la base $\mathcal{E}$

$$\begin{aligned} g(e_1) &= e_2 + e_3 \ ,\\ g(e_2) &= e_1 + e_3 \ ,\\ g(e_3) &= e_1 + e_2 \ .\end{aligned}$$

3.1 Quelle est la matrice M représentative de g dans la base $\mathcal{E}$?

3.2 Calculer la matrice de g dans la base $\mathcal{F}$.

Exercice 2

Diagonaliser la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Exercice 3

Soit la fonction

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\cos x + t^2} \ .$$

1 Quelle est l'ensemble de définition de I ?

2 Montrer que I est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

3 Montrer que I est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Peut-on dériver sous le signe somme ?

Fin de l'épreuve