UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

L2-Physique

Méthodes mathématiques pour la physique

Epreuve de rattrapage 2014-2015

Documents, calculatrice et téléphones portables interdits

Exercice 1

Diagonaliser la matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Exercice 2

On considère $\mathbb{R}^2$ munie de sa base canonique $\mathcal{B}_2 = \{e_1, e_2\}$, $\mathbb{R}^3$ munie de sa base canonique $\mathcal{B}_3 = \{f_1, f_2, f_3\}$ et l'application linéaire de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(e_1) = f_1 + f_2 + f_3 \;, f(e_2) = f_1 - f_2 \;.$$

1 Calculer Ker(f) et Im(f). Donner une base de Ker(f) et Im(f). L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?

2 La famille $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est-elle libre, forme-t-elle une famille génératrice, une base de $\mathbb{R}^3$?

3 Donner la matrice représentative de f relativement aux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$.

4 On considère maintenant un changement de base

$$\left\{ \begin{array}{l} e'_1 = e_1 + 2e_2 \\ e'_2 = 2e_1 - e_2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} f'_1 = f_1 - f_2 \\ f'_2 = f_2 + f_3 \\ f'_3 = f_1 - f_3 \end{array} \right.$$

Calculer la matrice représentative de f dans les bases $\mathcal{B}'_2 = \{e'_1, e'_2\}$ et $\mathcal{B}'_3 = \{f'_1, f'_2, f'_3\}$.

4 On donne dans la base $\mathcal{B}_3$:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Calculer les composantes de v dans la base $\mathcal{B}'_3$.

Exercice 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et la fonction

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x^2 + t^2)^n} .$$

1 Quelle est l'ensemble de définition de I_n ?

2 Montrer que I_n est continue sur $]0, \infty[$.

3 Montrer que I_n est dérivable sur $]0, \infty[$.

4 Établir une relation entre $\frac{\mathrm{d}I_n(x)}{\mathrm{d}x}$ et $I_{n+1}(x)$. En déduire $I_1(x), I_2(x)$ et $I_3(x)$.

Fin de l'épreuve