Université de Strasbourg

Licence Physique L2 S4
2015-2016

Analyse complexe

Contrôle continu 2

22/03/2016 de 8h à 9h

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ on note $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

1. Enoncer les équations de Cauchy-Riemann.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$.
3. Montrer que pour tout $z = x + iy$,
$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow f'(z) = 0.$$
4. Montrer que si $|f(z)|^2 = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors f est constante.

Exercice 2. On considère la série entière suivante :
$$S(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{(n!)^2}.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de S.
2. Montrer que S vérifie l'équation différentielle
$$z^2 S''(z) + zS'(z) = 4z^2 S(z).$$

Exercice 3. On considère la fonction définie comme suit:
$$f(z) = \frac{z + i}{z^2 - 1}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. La fonction f est-elle analytique sur son ensemble de définition ?
3. Déterminer le développement en série entière de f au point 0. En déduire $f^{(42)}(0)$.