Université de Strasbourg

Licence Physique L2 S4
2016-2017

Analyse complexe

Contrôle continu 2

10/05/2017, durée : 1h30

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. **La qualité de la rédaction sera prise en compte. Toutes les réponses doivent être justifiées.**

Exercice 1 (Question de cours). **Énoncer la formule de Cauchy généralisée ainsi que le théorème de Cauchy (on prendra soins de donner les différentes hypothèses).**

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction définie de la façon suivante

$$f(z) = \frac{\cos(z^n + 1)}{z^n - 1}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. On note $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ le développement en série de Taylor de f en 0. Quel est le rayon de convergence de z ?

Exercice 3. On note $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma(t) = e^{it}$.

1. Calculer
$$\int_\gamma \frac{1 - z^4}{z^2(3z+1)(z+3)} dz.$$
2. En déduire
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2t)}{5 + 3\cos t} dt.$$

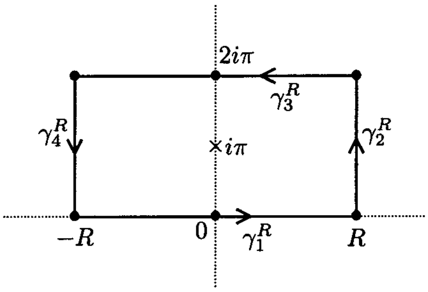
Exercice 4. Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale suivante (dont on admettra la convergence) :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x + 1} dx.$$

On considère la fonction

$$f(z) = \frac{e^{\frac{z}{2}}}{e^z + 1},$$

et pour tout $R > 0$ on considère le lacet $\gamma^R = (\gamma_1^R, \gamma_2^R, \gamma_3^R, \gamma_4^R)$ représenté graphiquement comme suit :



1. Donner une paramétrisation des chemins $\gamma_1^R, \gamma_2^R, \gamma_3^R, \gamma_4^R$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
3. Calculer le développement en série de Taylor de la fonction $g(z) = e^z + 1$ au point $i\pi$. (On pourra observer que $e^z = -e^{z-i\pi}$).
4. Montrer que $i\pi$ est un pôle d'ordre 1 de f.
5. Montrer que $\mathrm{Res}(f, i\pi) = -i$.
6. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ dans l'ensemble de définition de f on a $f(z + 2i\pi) = -f(z)$. En déduire que
$$\lim_{R\to+\infty} \left(\int_{\gamma_1^R} f(z)dz + \int_{\gamma_3^R} f(z)dz \right) = 2I.$$
7. Montrer que
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2^R} f(z)dz = 0.$$
(On admettra dans la suite que l'on a aussi $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_4^R} f(z)dz = 0$).
8. En déduire la valeur de I.