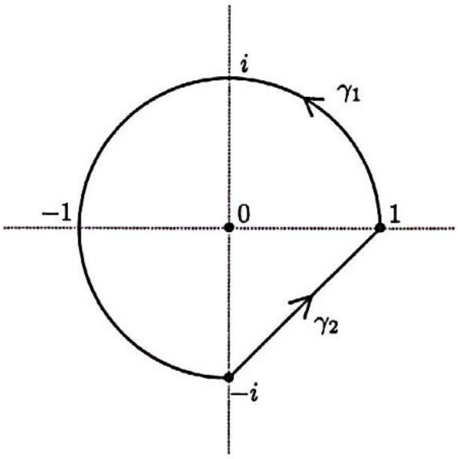
Université de Strasbourg

Licence Physique L2 S4
2015-2016

Analyse complexe
Contrôle continu 3
03/05/2016 de 10h à 11h30

Exercice 1. 1. Donner une paramétrisation du chemin $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$, représenté graphiquement comme suit :



2. Montrer que la fonction $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et déterminer f'.
3. Calculer l'intégrale curviligne suivante :

$$I = \int_\gamma \left(\bar{z} + (2z-1)e^{\frac{1}{z}} + \frac{\cos(z)\sin(z^3)}{(z-2)^3} \right) dz.$$

Exercice 2. Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{5 + 4\cos t} dt.$$

On considère le chemin γ défini par $\gamma(t) = e^{it}$ pour $t \in [0, 2\pi]$, et la fonction complexe définie par

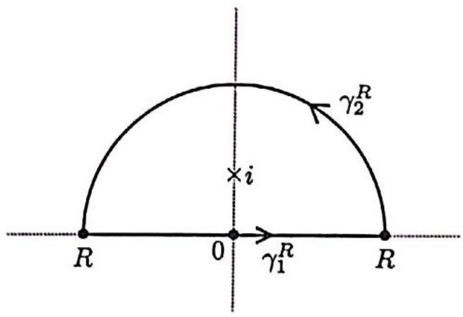
$$f(z) = \frac{-iz^2}{2z^2 + 5z + 2}.$$

1. Représenter graphiquement le chemin γ.
2. Montrer que

$$I = \mathrm{Re}\left(\int_\gamma f(z) dz \right).$$

3. Montrer que f a pour uniques singularités des pôles d'ordre 1 en -2 et $-\frac{1}{2}$.
4. Montrer que
$$\mathrm{Res}_{-\frac{1}{2}}(f) = \frac{-i}{12}.$$
5. En déduire la valeur de I.

Exercice 3. On cherche à calculer l'intégrale suivante :
$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$
On considère la fonction complexe
$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3},$$
et pour tout $R > 0$, on considère le chemin $\gamma^R = (\gamma_1^R, \gamma_2^R)$ représenté graphiquement ci-dessous.



1. Montrer que
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_1^R} f(z)dz = I \quad \text{et que} \quad \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2^R} f(z)dz = 0.$$
2. Calculer $\mathrm{Res}_i(f)$.
3. Pour tout $R > 1$, déterminer $\int_{\gamma^R} f(z)dz$. En déduire la valeur de I.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

1. Montrer que si $f(\frac{1}{n}) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors $f(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
2. Est-il vrai que si $f(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors $f(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$? Justifier.