Université de Strasbourg

Licence Physique L2 S4
2014-2015

Analyse complexe

Epreuve de rattrapage
08/06/2015 de 8h à 10h

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif et pourra être modifié. Toutes les réponses doivent être justifiées. ***La qualité de la rédaction sera prise en compte.***

Exercice 1 (9 points). On considère la fonction complexe suivante :

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. La fonction f est-elle holomorphe sur son ensemble de définition ? Si oui, déterminer f'.
3. L'équation $f(z) = 1$ a-t-elle une solution ? Si oui, la déterminer.
4. Soit $w \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Déterminer $z \in \mathbb{C}$ telle que $f(z) = w$.
5. Si $\operatorname{Im}(z) = 0$, que peut-on dire de $|f(z)|$?
6. On note $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0\}$. Representer graphiquement H. Determiner l'image de H par f, et representer graphiquement l'image de H par f.

Exercice 2 (5 points). On considère les séries entières suivantes :

$$S_1(z) := \sum_{n \geqslant 0} \frac{3^n}{3n+4} z^n, \qquad S_2(z) := \sum_{n \geqslant 0} \frac{3^n}{3n+4} z^{3n+4}.$$

1. Determiner le rayon de convergence de S_1.
2. Determiner le rayon de convergence de S_2.
3. Calculer la valeur de S_2' en tout point du disque de convergence de S_2. En déduire $S_2'(\frac{1}{2})$.

Exercice 3 (6 points). On considère la fonction

$$f(z) = \frac{z+3}{(z-1)^2 z}.$$

1. Calculer $\operatorname{Res}_0(f)$
2. Calculer $\operatorname{Res}_1(f)$.
3. Énoncer le théorème des résidus.
4. On considère un nombre réel $r > 0$ tel que $r \neq 1$. En fonction de la valeur de r, déterminer

$$\int_{C(0,r)} f(z) dz.$$

(Rappelons que $\int_{C(0,r)} f(z)dz$ désigne l'intégrale de f le long du cercle de centre 0 et de rayon r orienté dans le sens trigonométrique).