Session de rattrapage d'électromagnétisme S4

Durée : 1h30

Document et calculatrice interdits. La découverte pendant l'épreuve de tout matériel de communication même éteint entraînera sa saisie.

S. Boukari, C. Genet

12/06/2015

Questions de cours

1. Écrire les 4 équations de Maxwell dans le vide sans sources dans un point de vue local.
2. Déduire de ces équations l'équation d'onde à laquelle obéissent les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ (rappel : $\nabla \times \left(\nabla \times \vec{U}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{U}\right) - \nabla^2\vec{U}$). Donnez la dimension du produit $\varepsilon_0\mu_0$.
3. Dans le repère cartésien (x, y, z), montrer que $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, t)$ correspond à une onde plane dont on donnera le plan d'onde et le vecteur directeur.
4. Comment s'écrit l'onde plane dans le cas d'un vecteur directeur quelconque $\hat{\mathbf{n}}$?
5. Soit une onde plane, solution possible de l'équation d'onde de la forme : $\vec{E}(x, t) = \vec{E}(x - ct)$. Montrer le caractère progressif de cette onde plane. Définir la vitesse de propagation de l'onde. À partir de l'équation d'onde, relier c à ε_0 et μ_0.
6. Soit $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t)$ écrit dans le même repère cartésien (x, y, z). Définir ce type d'onde. Quelle est la direction de propagation de cette onde ?
7. Donner les orientations possibles pour $\vec{E}_0$.
8. À partir de l'équation d'onde dérivée en 2., donner la relation entre k et ω. Comment se nomme une telle relation ?

Exercice 1

Soit une sphère chargée avec une densité surfacique σ.

1. En quelle unité s'exprime σ ?
2. Quelle est la charge totale portée par la sphère ?
3. En examinant les invariances et symétries du problème, expliquer comment simplifier l'écriture du champ électrique $\overrightarrow{E(r, \theta, \phi)}$ créé par la sphère.
4. Expliquer comment les symétries permettent de déduire le champ électrique au centre de la sphère et donner sa valeur.
5. En utilisant les équations locales, calculer le champ électrique puis le potentiel produit par la sphère.
6. Exprimer les résultats précédents en fonction de la charge totale portée par la sphère.
   En coordonnées sphériques, on a :

$$\mathrm{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 v_r(r,\theta,\phi)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial \sin(\theta) v_\theta(r,\theta,\phi)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial v_\phi(r,\theta,\phi)}{\partial \phi} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(s) = \frac{\partial s}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial s}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \quad (2)$$

Exercice 2

Soit une onde caractérisée par le champ électrique $\vec{E} = E_0 \sin(\frac{\pi x}{a}) e^{j(\omega t - kz)} \vec{e_y}$.

1. Donner la partie réelle du champ électrique.
2. Calculer le champ magnétique de l'onde en notation complexe, puis donner la partie réelle du champ magnétique.
3. Calculer en notation réelle le vecteur de Poynting de l'onde.
4. Donner la moyenne temporelle du vecteur de Poynting et donner la direction et sens de propagation de l'énergie (on donne $< \cos(\omega t) \sin(\omega t) >= 0$, $< \cos^2(\omega t) >= 1/2$).