Mécanique analytique et systèmes dynamiques : contrôle continu n°3
documents interdits, calculatrice non-autorisée, durée 2h

Nom: ____________________________________

27/04/2016

1 Questions sur le cours

1. Le hamiltonien d'une pendule est donnée par $H(\phi, p_\phi) = E = \frac{p_\phi^2}{2I} + \frac{I\omega^2}{2}(1 - \cos\phi)$, avec une énergie E totale du système constante et d'autres constantes I et ω. Quelle est le comportement de la pendule dans les deux cas de $E < I\omega^2$ et $E > I\omega^2$?
2. Sous quelle condition un potentiel $V(x)$ permet-il des oscillations autour d'une position x_0 donnée ?
3. Écrire la forme la plus générale de l'énergie cinétique T et du potentiel V pour un système d'oscillateurs à n degrés.
4. Comment se présente-t-il le portrait des phases d'un système périodique par rapport à celui d'un système chaotique ?

2 Multiplicateur de Lagrange

Le lagrangien d'un système est donné par

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - mgq_2 + \lambda(q_1 \tan\alpha - q_2), \qquad (1)$$

oú λ est un multiplicateur de Lagrange, g, α et m sont des constantes.

1. Quelle est la trajectoire de ce système ? Quel système physique est représenté par ce lagrangien ?
2. Résoudre les équations du mouvement si $\dot{q}_1(0) = v_0\cos\alpha$, $\dot{q}_2(0) = v_0\sin\alpha$ et $q_1(0) = q_2(0) = 0$. Déterminer λ.
3. Que représentent les deux quantités $\lambda\tan\alpha$ et $-\lambda$?

3 Transformation canonique

Soit la transformation donnée par :

$$q_1 = q_1'\cos\lambda + \frac{p_2'}{m\omega}\sin\lambda \quad , \quad q_2 = q_2'\cos\lambda + \frac{p_1'}{m\omega}\sin\lambda, \qquad (2)$$

$$p_1 = -m\omega q_2'\sin\lambda + p_1'\cos\lambda \quad , \quad p_2 = -m\omega q_1'\sin\lambda + p_2'\cos\lambda. \qquad (3)$$

Si cette transformation est une transformation canonique, alors il existe une fonction $F_2(q_i, p_i')$, $i = 1, 2$, tel que

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad , \quad q_i' = \frac{\partial F_2}{\partial p_i'}. \qquad (4)$$

1. Déterminer la fonction génératrice F_2, (m, ω et λ sont des constantes).
2. Trouver la nouvelle fonction d'Hamilton $H(p_i', q_i')$ si

$$H(p_i, q_i) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(q_1^2 + q_2^2). \qquad (5)$$

3. Trouver le langrangien associé à $H(p_i, q_i)$ et commenter.

–> –> TOURNER LA PAGE ! –> –>

4 Principe variationnel – BONUS

Dans le plan (x, y), on considére la propagation de la lumière dans un milieu d'indice de réfraction n variable dans l'espace. On sait que la lumière minimise la fonctionnelle

$$S = \int_{chemin} n(x, y) ds$$

où $ds^2 = dx^2 + dy^2$. On place un laser centré en $A = (0, 0)$ et pointé dans une direction faisant un angle α avec le côté positif de l'axe x. Trouver la trajectoire $y(x)$, puis $x(y)$, du faisceau lumineux dans le cas ou $n(x, y) = n(x) = n_0 + ax^2$ avec $n_0 > 1$ et $a > 0$. Faire une esquisse de la trajectoire.

Indication : $\frac{d}{dx} arccosh(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$