L2-S4 / CONTROLE DES CONNAISSANCES 1

9 mars 2016

Durée : 1 heure 30. Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.

Les exercices sont indépendants

La notation proposée est à titre indicatif.

Il sera tenu compte

- de la clarté de l'exposé des méthodes / outils que vous employez pour résoudre le problème posé ;
- de l'orthographe.

I – Application des outils mathématiques [7,5 pts]

I.1- [0.5] Calculer les dérivées partielles du premier ordre de la fonction f(x,y,z) = $x + \dfrac{x-y}{y-z}$

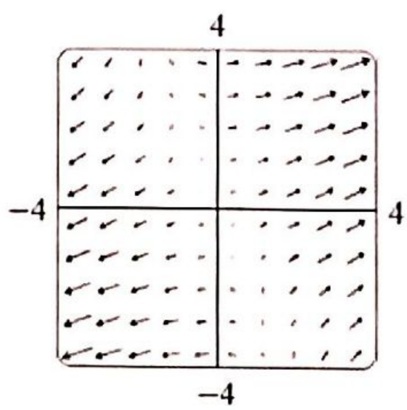
I.2- [1 *pt*] Déterminer le Jacobien pour le changement de variable suivant :
x = u.(1-v) ; y = uv.(1-w) ; z = u.v.w

I.3- [1,5 *pts*] Evaluer l'intégrale curviligne $\int_C \left(x^2 - y + 3z\right) ds$ où C est le segment de droite entre les points (0,0,0) et (1,2,1).
On utilisera une paramétrisation du segment en posant x = t.

I.4- [*1,5pts*] Déterminer l'aire de la région du plan (O,x,y) délimitée par les courbes d'équations :

$$\begin{cases} 2y = 16 - x^2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

I.5 - [*1,5pts*] Voici le champ de gradient d'une fonction f.



a) Parmi les 4 fonctions proposées, de laquelle s'agit-il? Une justification est demandée.

$i) f(x,y) = x.(x+y)$

$ii) f(x,y) = (x+y)^2$

$iii) f(x,y) = x^2 + y^2$

$iv) f(x,y) = \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

b) Déterminer les flux locaux.

I.6- [*1,5pts*] Soit f une fonction définie par $f(x,y) = 9.x^2 - 4y^2$
a) Déterminer le gradient de f au point P(3,2).
b) Déterminer la courbe de niveau telle que f(x,y) = 65 au point P.

II – Applications pour la physique [13,5 pts]

II.1- [3 *pts*] Supposons que la distribution massique à l'intérieur de la Terre décroit linéairement entre le centre et la surface : $\rho(r) = \rho(1-\alpha r)$, $\alpha > 0$.
a) Déterminer la masse de la Terre M en fonction de son rayon R et de ρ.

b) Donner l'expression du moment d'inertie I_O de la Terre par rapport à son centre à partir de l'expression de ρ(r) définie en *b*. en fonction de M et R.
On rappelle que $I_O = \iiint_V r^2.dM$

II.2- [3 *pts*] Le principe d'une voile est de récupérer l'énergie du vent et de la transmettre au bateau. L'effort du vent sur la voile, ou poussée vélique, a lieu en un centre de pression (x_p, y_p). Si la voile est modélisée par une région R plane, on définit le centre de pression par :

$$x_p = \frac{\iint_R xydA}{\iint_p ydA} \text{ et } y_p = \frac{\iint_R y^2dA}{\iint_p ydA}$$

Considérons une voile triangulaire dont les sommets ont pour coordonnées (0,0), (2,1) et (0,5).

Dessiner le centre de pression sur la voile après l'avoir calculé.

II.3- [3 *pts*] Couette a mis au point un appareil de mesure de la viscosité dynamique η d'un liquide . Le principe est d'insérer un liquide entre deux cylindres verticaux coaxiaux d'axe (O, **k**), de hauteur h et de rayon respectifs R1 et R2.
On néglige l'action du fond du liquide. Dans le référentiel du laboratoire, le cylindre extérieur est fixe. La rotation du cylindre intérieur est constante, de vitesse angulaire Ω,
Le champ de vitesse est de la forme $\vec{v}(r) = \left(\frac{A}{2}r + \frac{B}{r}\right).\vec{u}_\theta$ où A et B sont deux constantes dépendantes de R1, R2 et Ω.

a) Dessiner une section du problème étudié en précisant les repères adéquats.

b) Déterminer la vitesse de glissement d'un élément de couche situé en (r+dr) par rapport à une couche située en r. Faire un dessin pour expliquer la démarche.

c) *Rappel de la loi de Newton pour la viscosité dans un écoulement de cisaillement parallèle de la forme $v = v_x(y,t)$.* ***i.*** *La couche de fluide située au-dessus d'une surface élémentaire dS fixe exerce sur la couche sous dS une force tangentielle de cisaillement (force de viscosité) telle que :*

$$d\vec{F}_t = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS \cdot \vec{i}$$

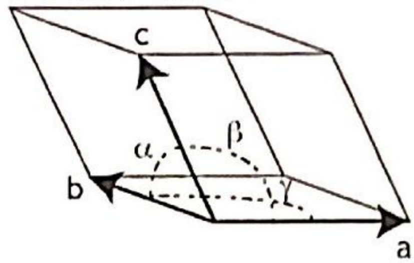
On cherche la force élémentaire de viscosité exercée par une couche de fluide sur une surface élémentaire dans le cas étudié. Quelle surface élémentaire allez-vous choisir ?

d) A partir de la loi de Newton rappelée en c. exprimer par analogie la force élémentaire de viscosité pour un écoulement entre 2 cylindres.

e) Déterminer le moment élémentaire agissant sur dS par rapport au point O.

II.4 - [3 *pts*] Introduction au réseau réciproque en cristallographie

On considère trois vecteurs **a**, **b** et **c** non nuls et non coplanaires. B = (**a**, **b**, **c**) constitue la base de l'espace géométrique définie par l'orientation du cristal.



On définit trois vecteurs de B tels que :

$$\begin{cases} \vec{a}^* = 2\pi \dfrac{\vec{b} \wedge \vec{c}}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})} \\ \vec{b}^* = 2\pi \dfrac{\vec{c} \wedge \vec{a}}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})} \\ \vec{c}^* = 2\pi \dfrac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})} \end{cases}$$

a) Précisez les directions des trois vecteurs par rapport aux plans P1(**a**, **b**), P2(**b**, **c**), P3(**c**, **a**).

b) Démontrer que $\vec{a} \cdot \vec{a}^* = \vec{b} \cdot \vec{b}^* = \vec{c} \cdot \vec{c}^* = 2\pi$

c) Que représente géométriquement, dans la base B, le produit mixte $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$?

d) On admettra que les 3 vecteurs **a***, **b*** et **c*** sont linéairement indépendants et forment une base B*, appelée base réciproque.
Montrer que $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})| \cdot |\vec{a}^* \cdot (\vec{b}^* \wedge \vec{c}^*)| = 8\pi^3$

e) La distance inter-réticulaire est la distance entre 2 rangées atomiques consécutives.
Soient 6 entiers naturels (m, n, p) et (h, k, l) tels que mh = kn = pl.
On considère deux vecteurs **r** et **r*** :

$$\vec{r} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} + p \cdot \vec{c}$$
$$\vec{r}^* = h \cdot \vec{a}^* + k \cdot \vec{b}^* + l \cdot \vec{c}^*$$

Montrer que **r**.**r*** = 2πs où s est un entier naturel. On identifiera s.

f) Soient trois points de l'espace direct du cristal A(m,0,0), B(0,n,0) et C(0,0,p).
On note P le plan passant par ces 3 points. Montrer que **r*** est perpendiculaire à P.

II.5- [*2 pts*] Les formules de passage de coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes sont :

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r \cdot \cos\theta \end{cases}$$

a) Exprimer les différentielles dx, dy, dz en fonction de dr, dθ, dφ.

b) En déduire dr, dθ, dφ en fonction de dx, dy, dz.