/

L2-S4 / CONTROLE DES CONNAISSANCES 2
mai 2016

Durée : 1 heure 30. Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.

Les exercices sont indépendants

La notation proposée est à titre indicatif.

Il sera tenu compte
- de la clarté de l'exposé des méthodes / outils que vous employez pour résoudre le problème posé ;
- de l'orthographe.

I – Application des outils mathématiques [10 pts]

I.1- [1] Calculer les dérivées partielles premières et la différentielle totale de la fonction

f(x,y) = $x \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right)$

I.2- [3] L'équation de van der Waals s'exprime par $\left(P + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = RT$ où P est la pression, V le volume, R la constante des gaz parfait et T la température.

L'étude des équilibres liquide/vapeur montre que l'état liquide est obtenu uniquement au-dessous de valeur seuil en température (Ts) et volume (Vs).

Calculer Ts et Vs sachant qu'ils vérifient $\left.\frac{\partial P}{\partial V}\right]_{T=Ts} = 0$ et $\left.\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right]_{T=Ts} = 0$

I.3- [3] Calculer l'intégrale curviligne du champ vectoriel **F** défini par **F**(x,y,z) = y^2.**i** + z^2.**j** + x^2.**k** sur le contour C : **r** = 3.cost.**i** + 3.sint.**j** + 2t.**k**, $0 \leq t \leq 4\pi$.

I.4- [1,5 *pts*] Déterminer l'intégrale double $\iint_R \left(a + \sqrt{x^2 + y^2}\right) \cdot dxdy$ où R est la région limitée par la cercle centré en 0 et de rayon a.

I.5- [1,5 *pts*] Déterminer l'intégrale curviligne

$I = \oint_C \left[(e^x y + \cos x.\sin y) \cdot dx + (e^x + \sin x.\cos y) \cdot dy\right]$ le long du contour C décrit par

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse).

II – Applications pour la physique [10 pts]

II.1- [*2,5pts*] On assimile un vaisseau sanguin à un tube cylindrique de rayon R et de longueur L. Le vitesse v du sang varie selon la distance à l'axe du tube en suivant la loi : $v = \frac{P}{4\eta L}(R^2 - r^2)$ où η est la viscosité du sang et P la différence de pression entre les 2 extrémités du tube.

1. Dessiner l'allure du champ de vitesse en précisant où la vitesse est la plus grande.

2. Calculer le flux sanguin en expliquant clairement votre méthode.

II.2- [*2,5pts*] Déterminer la masse volumique au centre de la terre en utilisant les données suivantes :
- la terre est une boule de rayon R = 40000 km.
- la masse de la terre est $M = 6.10^{24}$ kg.
- la masse volumique de la terre varie linéairement $\rho(r) = a.r + b$ et la mesure à la surface de la terre donne $\rho(R) = 3.\ 10^3$ kg . m^{-3}

II.3- [*2,5pts*] Soit une particule qui se déplace dans un champ vectoriel **F**(x,y) = (y-x).**i** + xy.**j** sur la portion de courbe décrite par **r**(t) = k.t.(1-t).**i** + t.**j** entre les points (0,0) et (0,1).
Déterminer la valeur de k pour que le travail de la particule dans le champ soit égale à 1.

II.4- [*2,5pts*] Soit **E** un champ électrique **E**(x,y,z) = yz**i** + xz.**j** + xy.**k** .
On rappelle la loi de Gauss : $\iint_S \bar{E} \cdot \vec{dS} = 4\pi kq$ où q est la charge et k la constante de Coulomb.
Déterminer la charge totale d'une surface fermée comprise entre une hémisphère centrée en 0, de rayon 1et sa base dans le plan (xOy).

FORMULAIRE

Analyse vectorielle en coordonnées cylindriques :

$$divF = \frac{1}{r}\frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

$$rot\bar{F} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right]\cdot \vec{u}_r + \left[\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right]\cdot \vec{u}_\theta + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right]\cdot \vec{u}_z$$

Longueur d'un arc

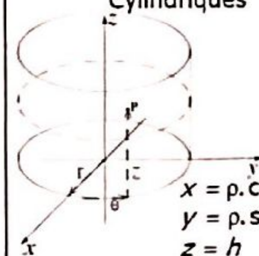
- coordonnées cartésiennes paramétrées : $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.dt$

- coordonnées polaires paramétrées : $ds = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{rd\theta}{dt}\right)^2}.dt$

- cartésiennes : $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.dx$

- polaires: $ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.d\theta$

Coordonnées

	Coordonnées			
	Cartésiennes	Polaires	Cylindriques	Sphériques
		 $x = r.\cos\theta$ $y = r.\sin\theta$	 $x = \rho.\cos\theta$ $y = \rho.\sin\theta$ $z = h$	 $x = \rho.\sin\theta.\cos\varphi$ $y = \rho.\sin\theta.\sin\varphi$ $z = \rho.\cos\theta$
dl	dx	$\begin{cases} dr \\ rd\theta \end{cases}$	$\begin{cases} d\rho \\ \rho d\theta \\ dz \end{cases}$	$\begin{cases} d\rho \\ \rho d\theta \\ \rho \sin\theta d\varphi \end{cases}$
dS	dx.dy	r.dr.dθ	ρ = cste $dS = \rho.d\theta.dz$ θ = cste $dS = d\rho.dz$ z = cste $dS = \rho.d\rho.d\theta$	ρ = cste $dS = \rho^2.\sin\theta.d\varphi.d\theta$ φ = cste $dS = \rho.d\theta.d\rho$ θ = cste $dS = \rho.\sin\theta.d\rho.d\varphi$
dV	dx.dy.dz	r.dr.dθ	$dV = \rho.d\rho.d\theta.dz$	$dV = \rho^2.\sin\theta.d\rho.d\theta.d\varphi$

Dérivées

$$\arctan(u)' = \frac{1}{1+u^2}u' \quad = \arctan'(u) \times u'$$

Intégrales :

$$\int \sin^2 u \cdot du = \frac{1}{2} \cdot (u - \sin u \cdot \cos u)$$

$$\int \cos^2 u \cdot du = \frac{1}{2} \cdot (u + \sin u \cdot \cos u)$$

$$\int \sin^n u \cdot du = \frac{\sin^{n-1} u \cdot \cos u}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \int \sin^{n-2} u \cdot du$$

$$\int u^n \cdot \cos u \cdot du = u^n \cdot \sin u - n \cdot \int u^{n-1} \cdot \sin u \cdot du$$

$$\int u^n \cdot \sin u \cdot du = -u^n \cdot \cos u + n \cdot \int u^{n-1} \cdot \cos u \cdot du$$

Théorème de Green dans le plan.

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx.dy$$

Théorème de Stokes

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{r} = \iint_R rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}.ds$$

Théorème de la divergence

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\cdot ds = \iiint_V div\,\vec{F}.dV$$