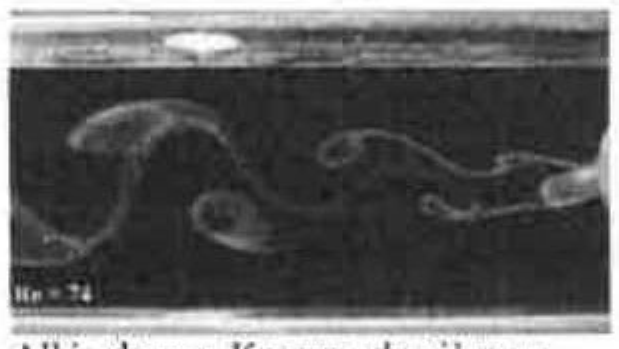

Allée de von Karman derrière un cylindre-Image équipe ITD-IMFS

LICENCE LPAI L2S3 2016-2017
Algèbre

CC2 - Sujet Amphi Fresnel 8h

Dany Huilier – Vendredi 6 janvier 2017

En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue !
(John von Neumann 1903-1957)

A rédiger avec soin, documents non autorisés, calculatrice inutile donc portables interdits – Donner le maximum d'intermédiaires de calcul ou joignez vos brouillons !!

Exercice : Méthodes directe de Cholesky & itératives

On considère le système à résoudre

$$AX = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Que peut-on dire d'emblée pour ce système en analysant les caractéristiques de la matrice A à énumérer. Calculez également les valeurs propres de cette matrice, ainsi que les vecteurs propres. (4 points)
- Donner la décomposition de Cholesky de cette matrice. (4 points) Idem pour la vérification si vous faites une descente-remontée pour avoir la solution (4 points)
- Résolvez le système par la méthode itérative de Jacobi. Est-ce possible ? Pourquoi ! On donnera notamment la matrice de Jacobi associée et son rayon spectral et en partant du vecteur nul, on calculera les 3 à 4 premiers itérés (4 points)
- Résolvez le système par une méthode itérative de Gauss-Seidel. Est-ce possible ? Pourquoi ? On écrira simplement le système de Gauss-Seidel et on calculera les premiers itérés en partant encore du vecteur nul, et si le temps le permet, on tâchera de calculer la matrice de Gauss-Seidel et ses valeurs propres (4 points)

Rappel : Décomposition de Cholesky simplifiée pour une matrice symétrique tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ l_1 & d_2 & 0 \\ 0 & l_2 & d_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & l_1 & 0 \\ 0 & d_2 & l_2 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

Méthodes itératives :

Rappels : voir feuilles suivantes

Définition

On dit que A est à ***diagonale strictement dominante*** si $\forall i \ |a_{ii}| > \sum_{j=1 \text{ et } j \neq i}^{n} |a_{ij}|$

ou si $\forall i \ |a_{ii}| > \sum_{j=1 \text{ et } j \neq i}^{n} |a_{ji}|$

Condition suffisante de convergence

Théorème

Si A est une matrice à diagonale strictement dominante alors la méthode de Jacobi appliquée au système A X = B est convergente pour tout $X^{(0)}$

Méthode de Gauss-Seidel

A partir de A = D - E - F on choisit G=D-E et H=F.

On a alors $M = (D-E)^{-1} F$ et $N = (D-E)^{-1} B$.

Le calcul effectif se fait en résolvant directement le système

$$(D-E)\, X^{(k+1)} = F\, X^{(k)} + B$$

soit

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j^{(k+1)} = -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

Remarque : le calcul de $x_i^{(k+1)}$ fait intervenir les valeurs des $x_j^{(k)}$ pour j>i et des $x_j^{(k+1)}$ pour j<i. On fera donc le calcul pour i allant de 1 à n.

Conditions suffisantes de convergence

Théorème 1

Si A est une matrice à diagonale strictement dominante alors la méthode de Gauss-Seidel appliquée au système A X = B est convergente pour tout $X^{(0)}$

Théorème 2

Si A est définie positive alors la méthode de Gauss-Seidel appliquée au système A X = B est convergente pour tout $X^{(0)}$

Les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont appelées techniques de relaxation. La méthode de Gauss-Seidel converge plus vite que la méthode de Jacobi.

Point de vue géométrique

Supposons A symétrique définie positive.

Au système AX=B on associe la fonctionnelle quadratique $J(X) = \frac{1}{2}\, {}^tX\, A\, X - {}^tX\, B$

Propriété

X_o est solution du système A X = B si et seulement si J(X) peut se mettre sous la forme

$$J(X) = \frac{1}{2}({}^tX - {}^tX_o)\, A\, (X - X_o) - C_o$$

où C_o est une constante.

$J(X_o)$ est égal au minimum de la fonction J(X)

On a, pour tout X , $J(X) \geq C_o$ et X_o est appelé le centre de la famille d'ellipsoïdes homothétiques $(J^{-1}(c))_{c > C_o}$

Définitions

On appelle ***résidu*** (ou *résidus*) relatif à Y le vecteur r(X) = A X – B

Le ***gradient*** de J en x est le vecteur $\frac{\partial J}{\partial x_i}(X)$