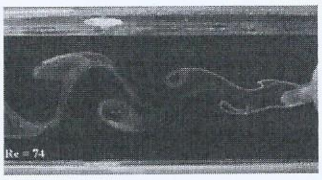

Allée de von Karman derrière un cylindre-Image équipe ITD-IMFS

**LICENCE LPAI L2S3 2014-2015**

**Analyse**

**CC - Session 2**

**Dany Huilier –3 juin 2015**

**Rien n'est plus proche du vrai que le faux** ***Albert Einstein 1879 - 1955***

## Oscillations et séries infinies

**http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_E_M01_G04/co/NLP_E_M01_G04_14.html**

## Problème - Oscillations couplées (14/20) -Énoncé

On considère deux blocs de masses respectives $m_1$ et $m_2$ liés l'un à l'autre par.un ressort de constante de raideur $k_2$ . Le bloc de masse $m_1$ est lié à un point d'ancrage fixe par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur $k_1$ .

La masse des deux ressorts est négligeable et on suppose que l'amplitude de déplacement des deux blocs est toujours suffisamment faible pour que la loi de Hooke soit vérifiée. Finalement, tous les frottements sont considérés comme négligeables.

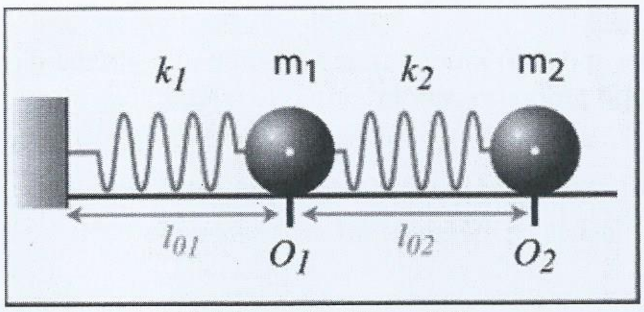


**Schéma du dispositif**

1. Etablir le système d'équations différentielles gouvernant l'évolution de la position des deux blocs dans le temps, à partir du schéma donné ci-dessous.

Les équations du mouvement s'écrivent alors : $\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = T_1 + T_2 = -(k_1 + k_2).x_1 + k_2.x_2 \\ m_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = T_{32} = k_2.x_1 - k_2.x_2 \end{cases}$

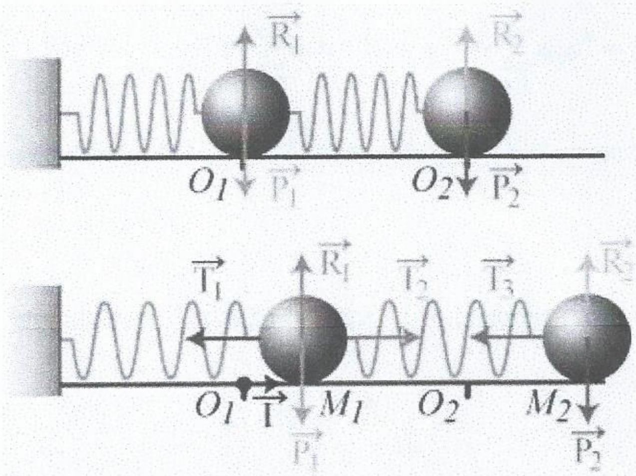


Schéma du dispositif avec bilan des forces dans un référentiel galiléen. On considère la projection de la loi de Newton suivant l'horizontale. On posera $0_1M_1 = x_1$ et $0_2M_2 = x_2$

2. On considère désormais que les blocs sont de masse identique de sorte que $m_1 = m_2 = m$. Par ailleurs, on posera $k = k_1$ et $k_2 = \alpha k$. On considère également que la constante de raideur $k_2$ est bien supérieure à $k_1$ de sorte que $\alpha >> 1$.
3. Ecrire le système de deux équations différentielles obtenu à la question 1 sous la forme vectorielle : $\frac{d^2X}{dt^2} = A.X$ avec $X = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ et déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$.
4. Montrer que la solution générale du système d'équations du mouvement s'écrit sous une forme simple.
5. Préciser le ou les mode(s) propre(s) de vibration du système d'oscillateurs et donner la ou les pulsation(s) propre(s) de vibration du système.
6. A l'instant $t = 0$, le bloc de masse $m_1$ est écarté d'une distance $a_0 > 0$ de sa position d'équilibre tandis que le bloc de masse $m_2$ en est écarté d'une distance $-a_0 < 0$. Les deux blocs sont lâchés en même temps sans vitesse initiale.

   Donner les lois horaires d'évolution de la position des deux blocs. Préciser la nature du ou des mode(s) propre(s) de vibration excité(s) par ces conditions initiales.

**Exercice sur les séries infinies (6 points/20)**

Inspiré de **https://www.math.psu.edu/srikrish/math251/notes/seriessols.pdf page 4-6**

On considère l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

On cherchera les solutions par la méthode directe qui donnera $y(x) = \mathrm{Re}(c_1e^{ix} + c_2e^{-ix})$, où $c_1$ *et* $c_2$ sont des complexes conjugués par exemple puis des solutions en séries infinies $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Montrez d'abord que la série doit vérifier $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

Montrez ensuite que les coefficients sont liés par la relation de récurrence :

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0$$

Ceci génère 2 séries, l'une engendrée par le paramètre $a_0$, l'autre par $a_1$.

Montrez que $a_{2k} = (-1)^k \dfrac{a_0}{(2k)!}$ *et* $a_{2k+1} = (-1)^k \dfrac{a_1}{(2k+1)!}$,

soit $y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Prenez le développement limité de la solution directe $y(x) = \mathrm{Re}(c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix})$ et trouvez par comparaison les relations entre $a_0, a_1, c_1$ *et* $c_2$.