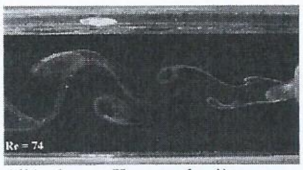
UFR de Physique & Ingénierie année 2015-2016
L2S3 – Analyse – Dany Huilier


Allée de von Karman derrière un cylindre-Image équipe ITD-IMFS

LICENCE LPAI L2S3 2015-2016
Analyse

CC2 - Sujet – Amphi Weiss

Dany Huilier – 30 novembre 2015 14h00 - 15h00

"On ne connaît pas complètement une science tant qu'on n'en sait pas l'histoire.."
(Auguste Comte 1798-1858)

A rédiger sur papier libre, sans aucun document autorisé, calculatrices & portables interdits –

Exercice 1 (5 points) Un peu d'analyse classique niveau L1

On considère la fonction $f(x)=\sin^3(x)\cos^2(x)$

1) **Calculez la valeur de sa dérivée en** $x=\pi/4$
2) **Linéarisez cette fonction <u>en utilisant les relations d'Euler</u>**
   $2\cos(x)=\exp(ix)+\exp(-ix)\quad et\quad 2i\sin(x)=\exp(ix)-\exp(-ix)$
3) **En déduire la primitive**
4) **Enfin calculez le développement limité en 0 de cette fonction jusqu'à l'ordre 3 inclus**

Exercice 2 sur les séries infinies (6 points/20)

On considère l'équation différentielle $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4y=0$

1) On cherchera les solutions par la méthode directe
2) Puis des solutions en séries infinies $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
3) Les 2 méthodes donnent-elles les mêmes solutions générales ?

Exercice 3 (6 points) EDO par 2 méthodes

On désire résoudre l'équation linéaire du $2^{\text{ème}}$ ordre suivante :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-3y=8x\exp(x)+5x\exp(2x)$$

Par 2 méthodes :

- La méthode classique (solutions de l'équation homogène puis solution particulière)
- La Méthode de variation des constantes
  Rappel : si $f(x)=K_1f_1(x)+K_2f_2(x)$ forme les solutions de l'équation homogène, on pose $f(x)=K_1(x)f_1(x)+K_2(x)f_2(x)$ et on suppose que $K_1'(x)f_1(x)+K_2'(x)f_2(x)=0$

Exercice 4 (3/20)

On se propose d'approximer sin(1/2)

Soit x > 0.

Démontrez que $\left|\sin x - x + \frac{x^3}{3!}\right| \leq \frac{x^4}{4!}$

En déduire que : $\frac{23}{48} - \frac{1}{384} \leq \sin(1/2) \leq \frac{23}{48} + \frac{1}{384}$

Rappel et piste : on utilise la formule de Taylor-Lagrange et on pondère le reste par un majorant. Si f est une fonction dérivable alors pour x, il existe $\theta \in (0,1)$ tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x=0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta.x) \quad \text{où} \quad \theta \in (0,1)$$

3. Trouver X.