



NOM :

Prénom :

Session d'examen : _____ C.C. 2

Filière : _____ Licence SPI

Matière : _____ Cinématique des Solides

Durée de l'épreuve : _____ 1 heure

Enseignant responsable : _____ J.P. de Magalhães Correia

Nombre de pages constituant
le sujet (celle-ci incluse) : _____ 16

Matériel autorisé :

- Tous documents autorisés (ceci inclut les calculettes),
- Calculettes autorisées. Les mémoires doivent avoir été vidées avant le début de l'épreuve.
- Calculettes interdites.
- Documents interdits.

Exercice A

Étude d'un compresseur d'air

Dans cette étude, nous allons nous intéresser à un compresseur d'air dont le plan d'ensemble est représenté sur la Fig. 1. Un compresseur permet de fournir de l'air sous pression à une machine qui utilise de l'énergie pneumatique. Un compresseur est généralement entraîné par un moteur électrique qui est relié à l'arbre moteur.

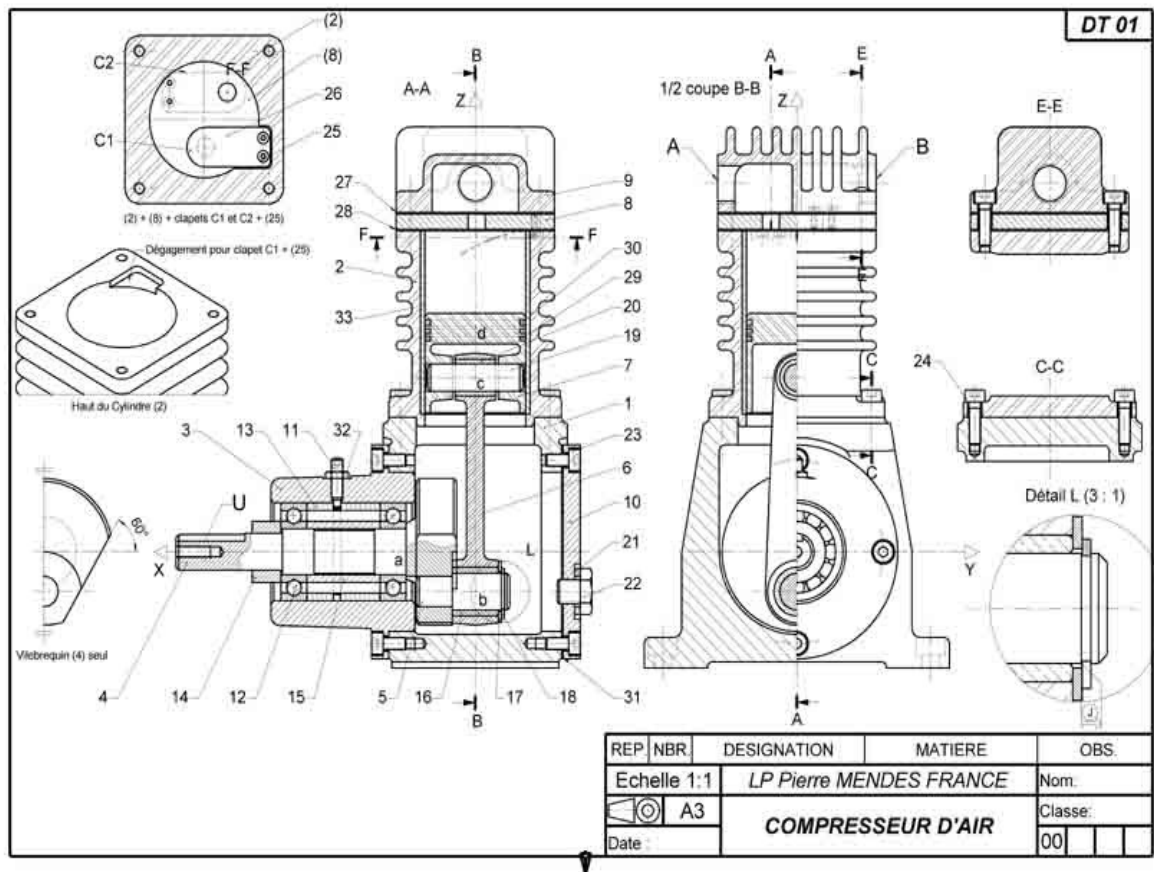


Fig. 1 : dessin d'ensemble d'un compresseur d'air
(source : <http://laparrej.free.fr/td/images/compresseur.jpg>)

Le principe de fonctionnement de ce compresseur est basé sur un système bielle (pièce 6 sur Fig. 1)-manivelle (pièce 4 sur Fig. 1). Le mouvement d'aller-retour du piston 7 permet alternativement d'augmenter puis de diminuer le volume de la chambre. Deux clapets anti-retour (C1 et C2) assurent la distribution du gaz. Un premier clapet autorise l'air extérieur à rentrer dans la chambre lorsque le piston 7 descend et l'empêche de ressortir. Le second clapet autorise l'air à sortir de la chambre lorsque le piston 7 remonte et que la pression est suffisante pour pousser la bille. Pour plus de détails, une vue en écorché est présentée en Annexe.

Afin de modéliser ce mécanisme, nous supposons que toutes les pièces de ce mécanisme sont rigides, c'est-à-dire que la géométrie de ces pièces peut être considérée comme invariante. Le compresseur peut-être vu comme un assemblage de solides rigides liés entre

eux par des liaisons. Nous utiliserons donc le graphe des liaisons ainsi que et le schéma cinématique minimal pour modéliser ce compresseur.

Pour établir le graphe des liaisons ainsi que le schéma cinématique, il fallu définir les classes d'équivalence suivantes : **bâti 0**, **arbre 1**, **bielle 2** et **piston 3**. Une classe d'équivalence est un ensemble de solides qui n'ont pas de mouvement relatif. La constitution des classes d'équivalence est reportée dans le Tableau (1).

Tableau (1) : Définition des classes d'équivalence

Classe d'équivalence (nom)	Numéros de pièces de la classe d'équivalence
0 : Bâti	1, 2, 3, 8, 9, 10, 11,13, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 31, 32,33
1 : arbre	4, 5, 14, 15, 17, 18
2 : Bielle	6, 16, 20
3 : piston	7, 19, 29, 30
4 : Clapet	26
Autre	12

Ensuite il a fallu paramétrer chaque classe d'équivalence (lui associer un référentiel ou repère) et définir les différentes liaisons entre les classes d'équivalence. Nous définissons les référentiels suivants :

- R_0 le référentiel lié au bâti **0**, référentiel fixe, qui a pour origine O et pour base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$,
- R_1 le référentiel lié à l'arbre **1**, référentiel mobile, qui a pour origine O et pour base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$,
- R_2 le référentiel lié à la bielle **2**, référentiel mobile, qui a pour origine A et pour base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$,

Les rotations entre les différentes base sont définies sur la Fig. 2. Les différents angles sont définis ci-dessous :

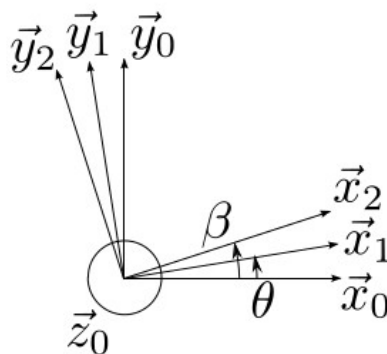


Fig. 2 : Définition des bases (source : <http://marc.derumaux.free.fr/>)

où $\theta(t) = \widehat{(\vec{x}_0, \vec{x}_1)} = \widehat{(\vec{y}_0, \vec{y}_1)} = \omega t$ avec ω qui constant et $\beta(t) = \widehat{(\vec{x}_0, \vec{x}_2)} = \widehat{(\vec{y}_0, \vec{y}_2)}$.

Le graphe des liaisons présenté sur la Fig. 3 récapitule l'ensemble des liaisons. L'arbre **1** est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) avec le bâti **0**. La bielle **2** est liaison rotule de centre A avec l'arbre **1** et en liaison rotule de centre **B** avec le piston **3**. Finalement le piston **3** est en liaison pivot-glissant d'axe (C, \vec{y}_0) avec le bâti **0**.

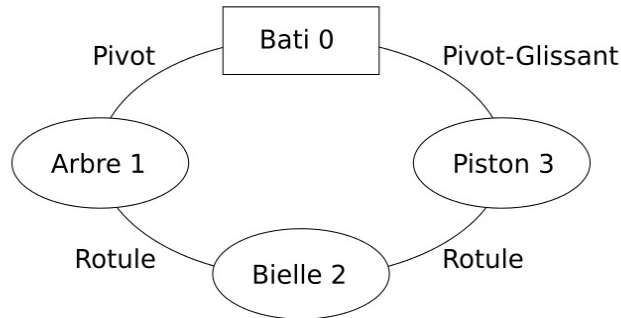


Fig. 3 : Graphe des liaisons (source : <http://marc.derumaux.free.fr/>)

Pour finir, nous pouvons tracer le schéma cinématique minimal de ce mécanisme qui, pour des raisons de clarté, ne sera représenté qu'en deux dimensions, Fig. 4.

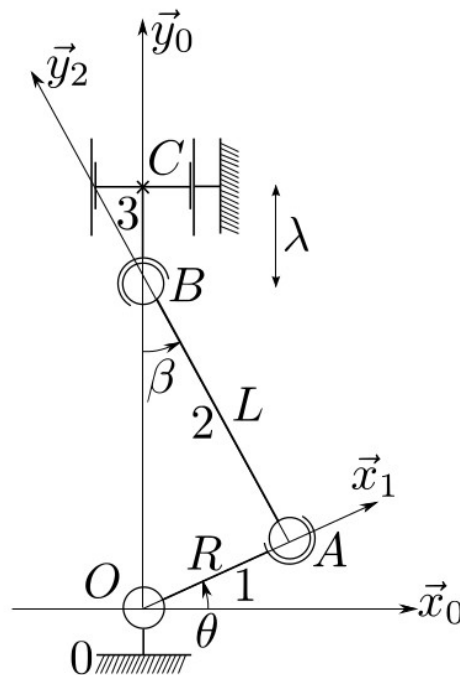


Fig. 4 : Schéma cinématique minimal en 2D (source : <http://marc.derumaux.free.fr/>)

Nous définissons les vecteurs positions suivants :

$$\vec{OA} = R \vec{x}_1, \vec{AB} = L \vec{y}_2 \text{ et } \vec{BC} = h \vec{y}_0 \text{ où } R, L \text{ et } h \text{ sont des constantes positives.}$$

Remarque : la position du point C évolue avec le temps.

Dans l'étude ci-dessous, ne chercher pas à projeter les résultats dans une base particulière. Mais, conserver les vecteurs unitaires des différentes bases dans vos résultats.

Questions

A1- Faire le schéma plan permettant de passer de R_0 à R_1 et déduire le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}(1/0)$.

A2- Faire le schéma plan permettant de passer de R_2 à R_0 et déduire le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}(2/0)$.

A3- En dérivant le vecteur position, déterminer l'expression de la vitesse du point A dans son mouvement par rapport au référentiel R_0 $\vec{V}(A/R_0)$.

A4- En déduire l'expression, au point A, du torseur cinématique de l'arbre **1** dans son mouvement par rapport au bâti **0** $\{V(1/0)\}_A$.

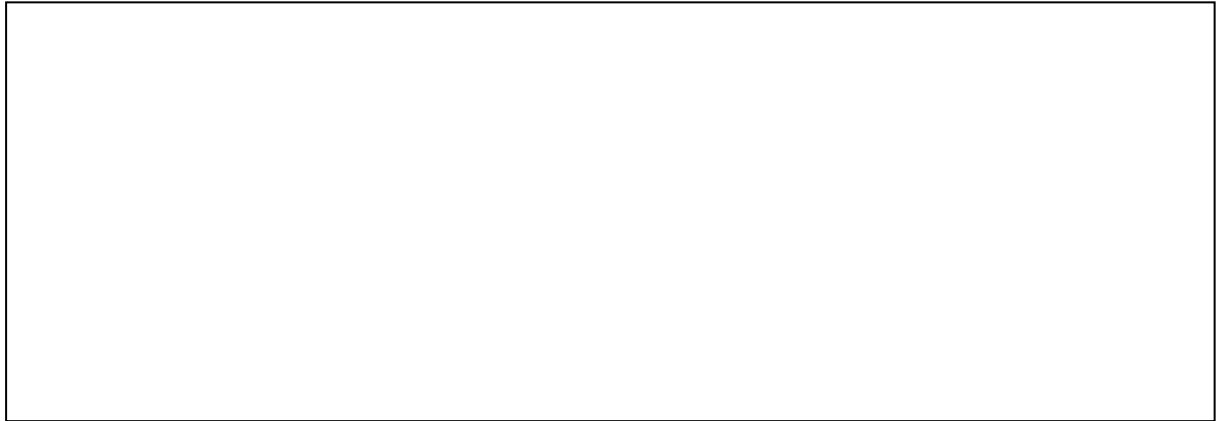
A5- Par composition des mouvements, déterminer l'expression du vecteur rotation de la bielle **2** dans son mouvement par rapport à l'arbre **1** $\vec{\Omega}(2/1)$.

A6- Déterminer l'expression, au point A, du torseur cinématique de la bielle **2** dans son mouvement par rapport à l'arbre **1** $\{V(2/1)\}_A$.

A7- En déduire l'expression, au point B, du torseur cinématique de la bielle **2** dans son mouvement par rapport à l'arbre **1** $\{V(2/1)\}_B$.

A8- Écrire, au point B, du torseur cinématique de l'arbre **1** dans son mouvement par rapport au bâti **0** $\{V(1/0)\}_B$.

A9- Par composition des mouvements, déterminer l'expression, au point B, du torseur cinématique de la bielle 2 dans son mouvement par rapport au bâti 0 $\{V(2/0)\}_B$.



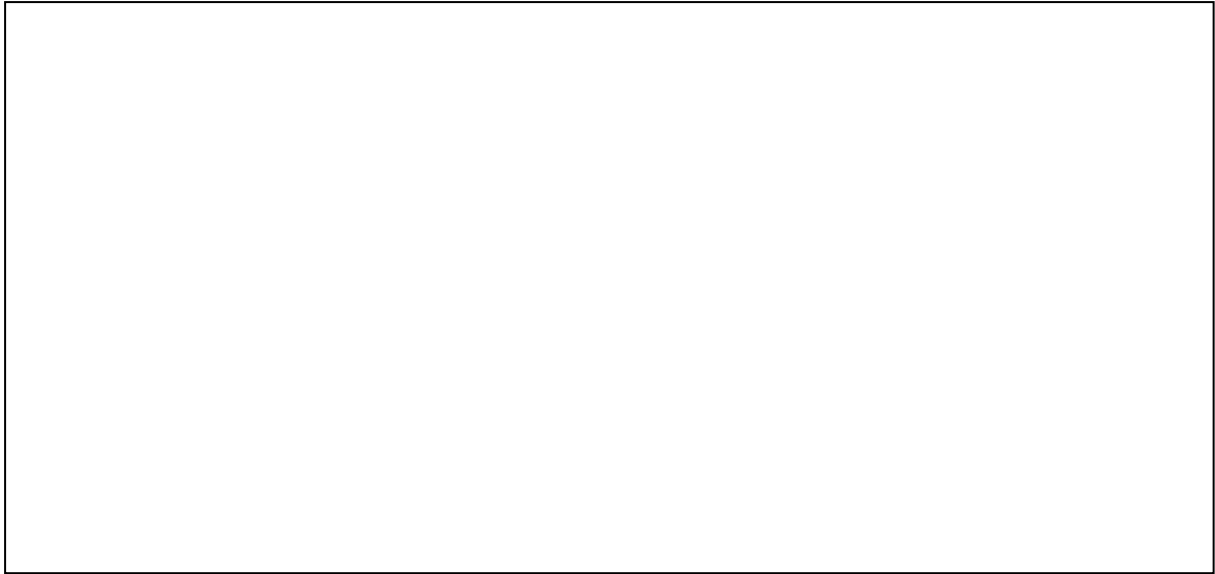
A10- En dérivant le vecteur position, déterminer l'expression de la vitesse du point B dans son mouvement par rapport au référentiel R_0 $\vec{V}(B/R_0)$. Que constatez-vous ?



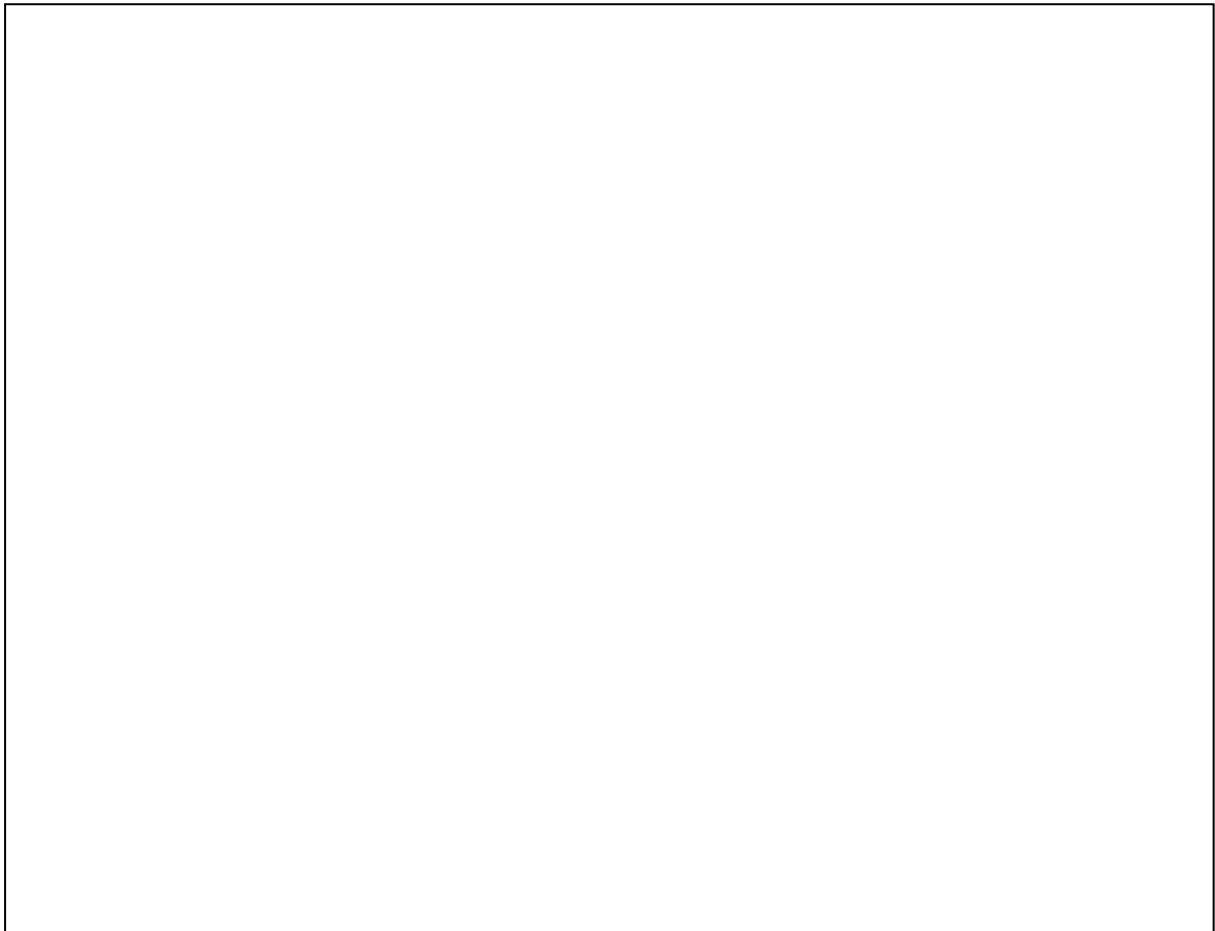
A11- En utilisant la relation du champ des vecteurs vitesse, déterminer l'expression de la vitesse du point C appartenant au piston 3 dans son mouvement par rapport au bâti 0 $\vec{V}(C,3/0)$.



A11- En dérivant le vecteur vitesse, déterminer l'expression de l'accélération du point A appartenant à l'arbre **1** dans son mouvement par rapport au bâti **0** $\vec{\Gamma}(A,1/0)$.



A12- En dérivant le vecteur vitesse, déterminer l'expression de l'accélération du point B appartenant à la bielle **2** dans son mouvement par rapport l'arbre **1** $\vec{\Gamma}(B,2/1)$.



A13- En utilisant la composition des mouvements, déterminer l'expression de l'accélération du point B appartenant à la bielle 2 dans son mouvement par rapport au bâti 0 $\vec{\Gamma}(B,2/0)$.
Que constatez-vous ?

Exercice B

Étude d'une pompe à palettes

La pompe à palettes est une pompe de transfert volumétrique.

Cette pompe est constituée par un corps en fonte à l'intérieur duquel se trouve un stator (fixe) et un rotor en acier qui tourne tangentiellement au stator.

Solidaires du rotor, les palettes peuvent coulisser et sont maintenues en contact avec les parois du stator par l'intermédiaire de l'action de la force centrifuge.

Le dessin (Fig. 5) ci-contre représente une pompe à palettes.

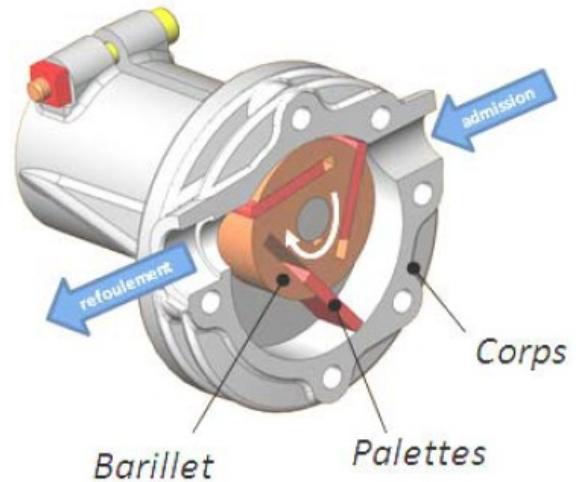


Fig. 5 : Schéma d'une pompe à palettes
(source : <http://s2i.chateaubriand.free.fr>).

Dans notre étude, nous allons considérer une pompe avec 3 palettes représentée schématiquement ci-dessous, Fig. 6. Le corps de la pompe est appelé stator 1 et possède une cavité cylindrique de révolution de rayon R . Le rotor 2 est en rotation par rapport au stator et comporte des fentes radiales dans lesquelles coulisser des palettes 3.

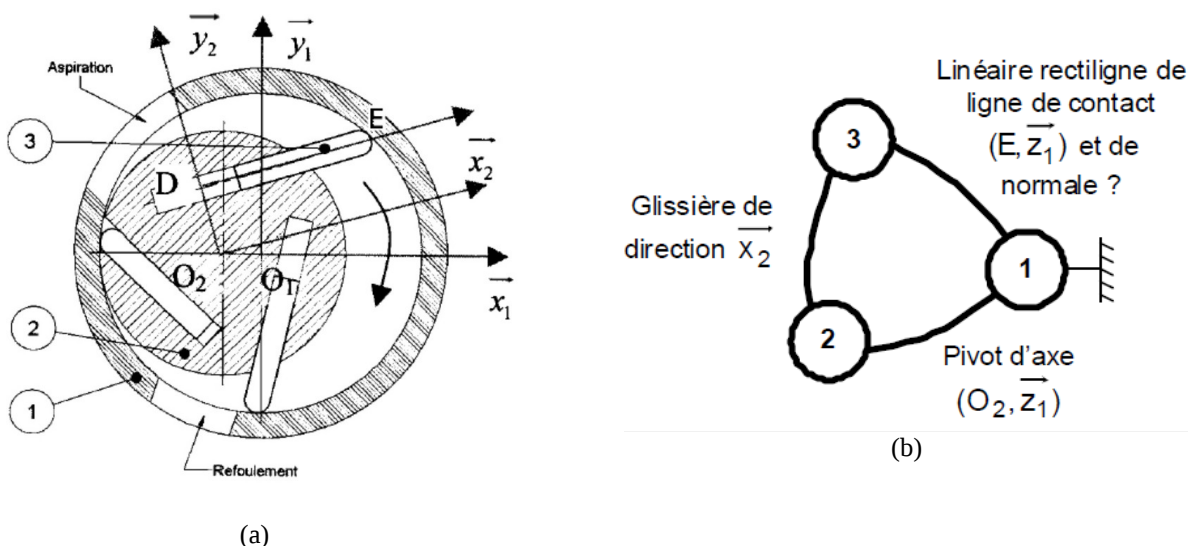


Fig. 6 : Géométrie de la pompe à palettes avec le paramétrage des différents solides (a) et graphe des liaisons de ce mécanisme (b).
(source : <http://s2i.chateaubriand.free.fr>).

En fonctionnement, un moteur électrique entraîne le rotor 2 en rotation. Par effet centrifuge, les palettes 3 sont plaquées sur la paroi intérieure du stator 1. La variation du volume de la

chambre comprise entre deux palettes consécutives est utilisée pour aspirer puis refouler un fluide. Dans cette étude, nous ne considérerons qu'une seule palette **3**.

Le repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est associé au stator **1**, $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ au rotor **2** et $R_3(E, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ à la palette **3**. Le rotor **2** a un mouvement de rotation d'axe (O_2, \vec{z}_1) par rapport au stator **1**.

Le rayon intérieur du stator **1** est noté R . L'axe de rotation du rotor **2** est excentré par rapport au stator **1** ; la distance entre les deux axes de rotation est appelée excentration et est défini par le vecteur :

$$\overline{O_1 O_2} = -e \vec{x}_1 .$$

Le point E de contact entre l'extrémité d'une palette **3** avec le stator **1** est supposé dans le plan de symétrie de la palette. Nous définissons les vecteurs positions suivant :

$$\overline{O_2 D} = d \vec{y}_2 \text{ et } \overline{DE} = \lambda(t) \vec{x}_2 .$$

Afin de s'assurer que les effets dynamiques (« force centrifuge ») plaqueront correctement les palettes **3** sur la surface interne du stator **1**, il est nécessaire de connaître le vecteur accélération du centre de gravité G_3 des palettes. Pour cette étude, nous posons :

$$\overline{G_3 E} = b \vec{x}_2 .$$

Dans l'étude ci-dessous, ne chercher pas à projeter les résultats dans une base particulière. Mais, conserver les vecteurs unitaires des différentes bases dans vos résultats.

Questions

Dans ce mécanisme, le paramètre d'entrée correspond à la position angulaire du rotor **2** par rapport au stator **1** (c'est-à-dire l'angle $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \alpha(t)$). Le paramètre de sortie correspond à la position linéaire de la palette **3** par rapport au stator **2** (c'est-à-dire la coordonnée $\lambda(t)$).

B1- Déterminer la loi entrée-sortie en position (c'est-à-dire la relation $\lambda = f(\alpha)$) de la pompe à palettes à l'aide de l'équation de fermeture géométrique :

$$\overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 D} + \overline{DE} + \overline{EO_1} = \vec{0}$$

B2- Déterminer l'expression du vecteur rotation du rotor **2** par rapport au stator **1**, $\vec{\Omega}(2/1)$.

B3- Déterminer l'expression du vecteur rotation d'une palette **3** par rapport au rotor **2**, $\vec{\Omega}(3/2)$.

B4- En déduire l'expression du vecteur rotation d'une palette **3** par rapport au stator **1**, $\vec{\Omega}(3/1)$.

B5- Sachant que le rotor **2** est en liaison pivot d'axe (O_2, \vec{z}_1) avec le stator **1**, exprimer le torseur cinématique associé à cette liaison, $\{V(2/1)\}_{O_2}$.

B6- Transporter le torseur du cinématique du rotor **2** dans son mouvement par rapport au stator **1** au point G_3 .

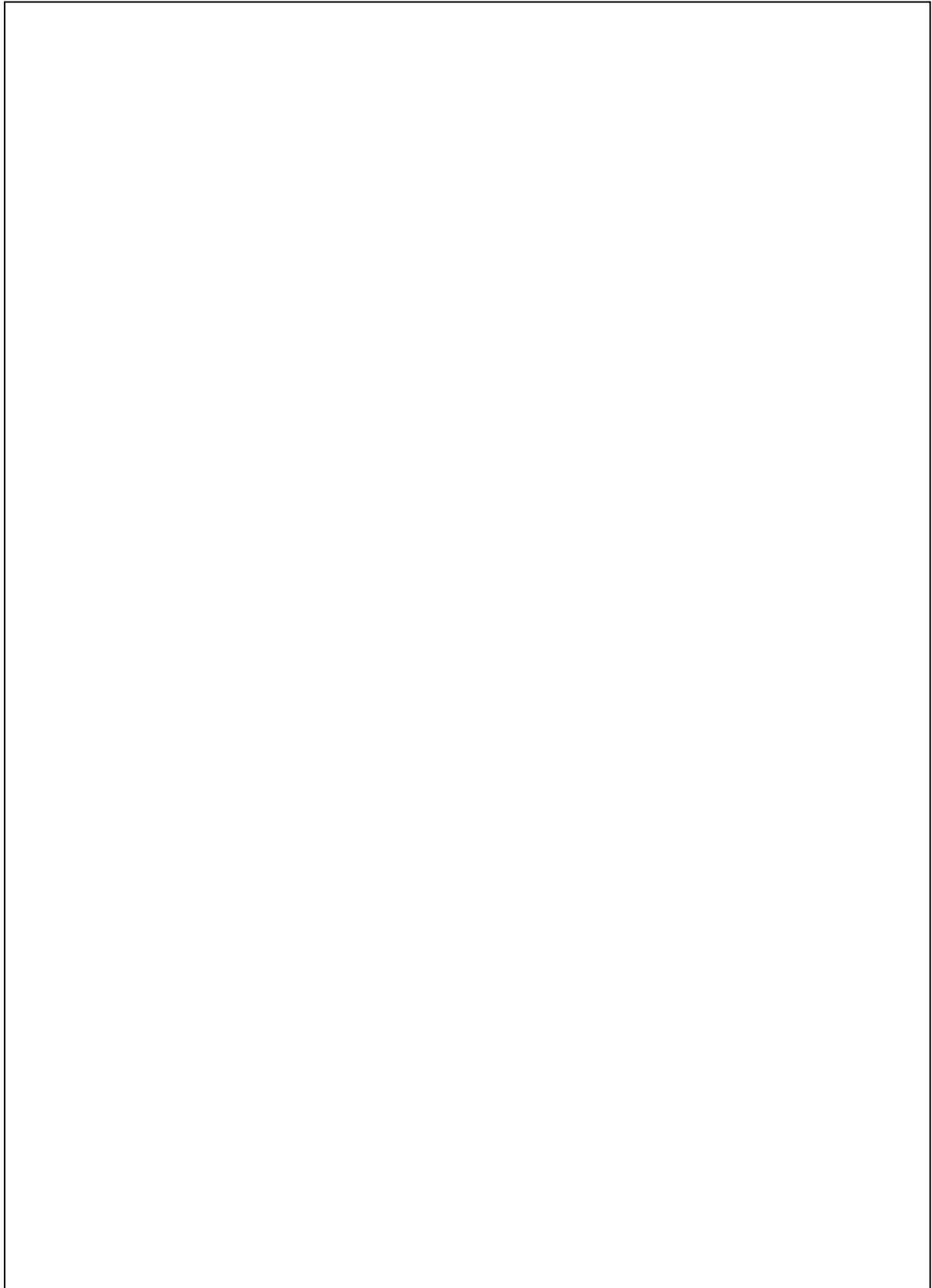
B7- Déterminer l'expression de la vitesse du centre de gravité G_3 dans son mouvement par rapport au repère R_2 , $\vec{V}(G_3/R_2)$, en dérivant le vecteur position.

B8- En supposant que la palette **3** est en liaison glissière d'axe (G_3, \vec{x}_2) avec le rotor **2**, exprimer le torseur cinématique associée à cette liaison, $\{V(3/2)\}_{G_3}$.

B9- En déduire par composition des torseurs cinématique, le torseur cinématique de la palette **3** dans son mouvement par rapport au stator **1** au point G_3 , $\{V(3/1)\}_{G_3}$.

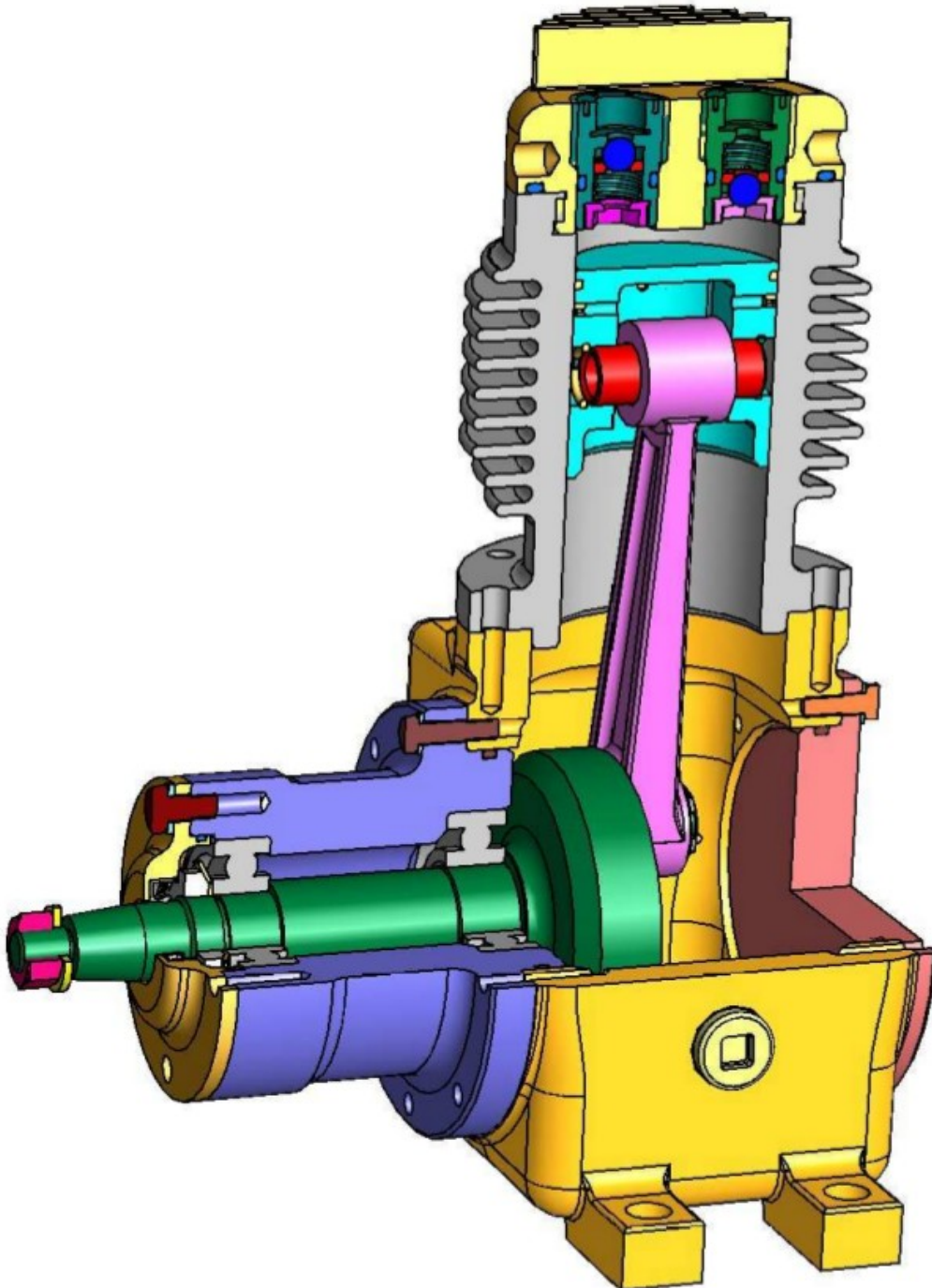
B10- En dérivant le vecteur position, vérifier l'expression du vecteur vitesse du centre de gravité G_3 d'une palette **3** dans son mouvement par rapport au stator **1**.

B11- Déterminer l'expression du vecteur accélération du centre de gravité G_3 d'une palette **3** dans son mouvement par rapport au stator **1**.



ANNEXES

Annexe A
Vue en écorché de l'intérieur du compresseur.



(source : <http://marc.derumaux.free.fr/>)